

# **SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICO DE ADHESIVOS SOMETIDOS A TORSIÓN**

Eduin GONZÁLEZ, estudiante de Maestría ([eduin.gonzalez@cimav.edu.mx](mailto:eduin.gonzalez@cimav.edu.mx))

Rubén Castañeda, técnico ([ruben.castaneda@cimav.edu.mx](mailto:ruben.castaneda@cimav.edu.mx))

Alberto DÍAZ, investigador ([alberto.diaz@cimav.edu.mx](mailto:alberto.diaz@cimav.edu.mx))

CIMAV, Centro de Investigación en Materiales Avanzados, S.C.

Ave. Miguel de Cervantes 120 Complejo Industrial Chihuahua. Chihuahua, México.

Tel.: +52 (614) 439 1100

## **Resumen**

En este trabajo se estudia el comportamiento elastoplástico de adhesivos sometidos a cortante puro mediante torsión de muestras cilíndricas. Se propone un modelo para el cálculo de esfuerzos y deformaciones y un método de resolución que exige un costo computacional mucho menor al de un software de elementos finitos comercial que además tiene el inconveniente de no poder integrar nuevos modelos de plasticidad. El método propuesto en este trabajo puede aceptar cualquier tipo de criterio de plasticidad que en un trabajo posterior será determinado mediante una campaña exhaustiva de pruebas. Los resultados teóricos ya fueron comparados con una prueba preliminar y se obtuvo una muy buena correlación empleando un criterio de plasticidad con endurecimiento lineal.

## **Abstract**

The aim of this paper is the analysis of adhesives subjected to shear stresses by means of torsional tests. The authors propose an elastic plastic model and a resolution method which is more interesting from a computational point of view than a commercial finite element method. Besides, a finite element software usually does not allow to define a new plasticity model in the input data. The method proposed herein, allows the user to define his own plasticity criterion and plasticity potential. In a subsequent paper, the criterion and the potential functions will be determined by means of several designed tests. In this paper, a preliminary comparison of the theoretical results with an experiment has been performed and a good correlation has been observed.

## **Introducción**

Es bien sabido que en general los polímeros termofijos son más frágiles que los polímeros termoplásticos. Sin embargo, bajo algunas condiciones de carga, estos termofijos pueden

presentar antes de su falla un comportamiento plástico. Su esfuerzo de cedencia y esfuerzo máximo se encuentran estrechamente relacionados con la presión hidrostática [1]; motivo por el cual es necesario considerar un estado tridimensional de esfuerzos y deformaciones [2]. No obstante y aunque se han realizado investigaciones para establecer un criterio de comportamiento que permita predecir su mecanismo de falla [3], no se han realizado mediciones de las deformaciones plásticas resultantes o se ha contemplado en su elaboración el efecto de escala. En este artículo, los autores se enfocan en la plasticidad de un adhesivo epóxico (un polímero termofijo) sometido a esfuerzos cortantes únicamente mediante pruebas de torsión. A diferencia de una prueba de tensión donde prácticamente no hay plasticidad, en una prueba de torsión la plasticidad es considerable y se alcanzan deformaciones plásticas superiores a un 10%. En este trabajo se presenta primeramente un modelo de plasticidad y las aplicaciones a un problema de torsión. Después, se describe el algoritmo adoptado para resolver el problema. Luego se muestran los resultados obtenidos con el programa. Finalmente, se hace una comparación de los resultados teóricos con valores experimentales.

### Modelado

Se considera una barra cilíndrica de material isotrópico de radio  $R$ , longitud  $L$  y sometida a una resultante axial  $P$  constante y a un momento de torsión  $M$  de magnitud creciente en el tiempo. La geometría considerada y el sistema de ejes seleccionado se encuentran graficados en la figura 1. Para cada paso de carga  $\xi$  la carga axial es menor que aquella requerida para originar plasticidad, por lo tanto se comenzará a plastificar en el borde  $r=R$  para un cierto valor crítico de  $M$ . El objetivo es calcular para pasos de carga  $\xi$  posteriores al inicio de la plasticidad, la constante de deformación plástica  $d\lambda$ , así como las componentes del tensor de esfuerzos  $\bar{\bar{\sigma}}$ , tensor de deformaciones totales  $\bar{\bar{\epsilon}}$  y tensor de deformaciones plásticas  $\bar{\bar{\epsilon}}^p$  en cada punto.

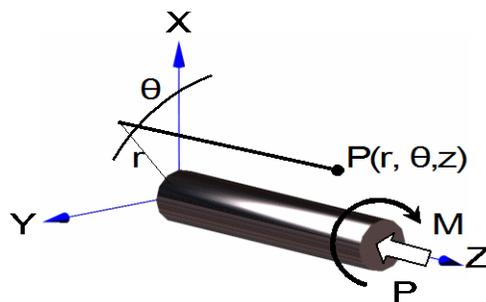


Figura 1. Referencia de la barra prismática circular al sistema de coordenadas. El momento  $M$  y la carga axial  $P$  se encuentran actuando en  $z=L$ .

Es natural que una vez iniciada la plastificación del material se originen dos regiones con comportamientos mecánicos distintos: la elástica contenida entre  $0 < r < r_0$  y la plástica definida para  $r_0 \leq r \leq R$ . El conjunto de puntos localizados a una distancia  $r_0$ , en donde el criterio de plasticidad comienza verificarse en el paso de carga  $\xi$ , recibe el nombre de frente de plasticidad.

De las ecuaciones de la mecánica, se obtienen las siguientes relaciones, para cada uno de los casos mencionados a continuación:

I) Caso puramente elástico.

Sea  $\underline{u}$  el campo de desplazamientos valido en la región elástica que resulta de la aplicación de las cargas, de manera que:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} a \cdot r \\ b \cdot r \cdot z \\ c \cdot z \end{bmatrix} \text{ siendo } a, b \text{ y } c \text{ constantes por determinar}$$

Las expresiones obtenidas a partir de  $\underline{u}$  son:

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} b \cdot r \\ 0 & \frac{\alpha}{2} b \cdot r & 2\beta \cdot a + (\alpha + \beta) \cdot c \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & \frac{b}{2} r \\ 0 & \frac{b}{2} r & c \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{\nu}{\pi E R^2} P(\xi); \quad b = \frac{4(1+\nu)}{\pi E R^4} M(\xi); \quad c = \frac{P(\xi)}{\pi E R^2}$$

En donde:

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \frac{1}{E} \underline{\underline{\sigma}}, \quad \alpha = \frac{1}{1+\nu} \text{ y } \beta = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

II) Caso elástico-plástico.

Definamos a  $\underline{U}$  como el campo de desplazamiento en la región plástica de modo que este es valido en  $r_0 \leq r \leq R$ , entonces:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \Psi \\ g \cdot r \cdot z \\ h \cdot z \end{bmatrix} \quad \text{siendo } g \text{ y } h \text{ constantes a determinar y } \Psi = \Psi(r)$$

Las expresiones que se obtienen considerando  $\underline{U}$  son:

$$\sigma_{rr}^* = \alpha \cdot (\Psi' - \varepsilon_{rr}^p) + \beta \cdot \left\{ \Psi' + \frac{1}{r} \Psi + h - (\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{zz}^p) \right\} \quad \text{(Ecuación E1.1)}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \alpha \cdot \left( \frac{1}{r} \Psi - \varepsilon_{\theta\theta}^p \right) + \beta \cdot \left\{ \Psi' + \frac{1}{r} \Psi + h - (\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{zz}^p) \right\} \quad \text{(Ecuación E1.2)}$$

$$\sigma_{zz}^* = \alpha \cdot (h - \varepsilon_{zz}^p) + \beta \cdot \left\{ \Psi' + \frac{1}{r} \Psi + h - (\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{zz}^p) \right\} \quad \text{(Ecuación E1.3)}$$

$$\sigma_{\theta z}^* = \sigma_{z\theta}^* = \alpha \left( \frac{1}{2} g \cdot r - \varepsilon_{\theta z}^p \right) \quad \text{(Ecuación E1.4)}$$

$$(\alpha + \beta) \Psi'' + \frac{(\alpha + \beta)}{r} \Psi' - \frac{(\alpha + \beta)}{r^2} \Psi = (\alpha + \beta) \frac{\partial \varepsilon_{rr}^p}{\partial r} + \beta \cdot \left( \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^p}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}^p}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{r} (\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\theta\theta}^p) \quad \text{(Ecuación E1.5)}$$

$$(\alpha + \beta) \Psi'_R + \frac{\beta}{R} \Psi_R + \beta \cdot h = (\alpha + \beta) \cdot \varepsilon_{rr,R}^p + \beta (\varepsilon_{\theta\theta,R}^p + \varepsilon_{zz,R}^p) \quad \text{(Ecuación E1.6)}$$

$$[2\beta \cdot a + (\alpha + \beta) \cdot c] \cdot r_0^2 + (\alpha + \beta) \cdot h \cdot (R^2 - r_0^2) + 2 \int_{r=r_0}^R \left\{ \beta \cdot \left[ \Psi' + \frac{1}{r} \Psi - (\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p) \right] - (\alpha + \beta) \varepsilon_{zz}^p \right\} \cdot r \cdot dr = \frac{1}{\pi E} P(\xi) \quad \text{(Ecuación E1.7)}$$

$$\frac{b}{4} r_0^4 + \frac{1}{4} g (R^4 - r_0^4) - 2 \int_{r=r_0}^R \varepsilon_{\theta z}^p \cdot r^2 \cdot dr = \frac{M(\xi)}{\pi \alpha E} \quad \text{(Ecuación E1.8)}$$

$$(\alpha + \beta) \Psi'_{r_0} + \frac{\beta}{r_0} \Psi_{r_0} + \beta \cdot h - (\alpha + \beta) \varepsilon_{rr,r_0}^p - \beta \cdot (\varepsilon_{\theta\theta,r_0}^p + \varepsilon_{zz,r_0}^p) = (\alpha + 2\beta) \cdot a + \beta \cdot c \quad \text{(Ecuación E1.9)}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{r_0} \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot r_0 \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{(Ecuación E1.10)}$$

Adicionalmente se deben satisfacer la ley normal de flujo y el criterio de plasticidad

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}, \Pi)}{\partial \sigma_{ij}} \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad \text{(Ecuación E1.11)}$$

$$F = F(\bar{\sigma}, \Pi) \quad \text{(Ecuación E1.12)}$$

en donde  $\Pi$  es el conjunto de propiedades del material consideradas.

En tanto en la región elástica se deben cumplir las relaciones siguientes:

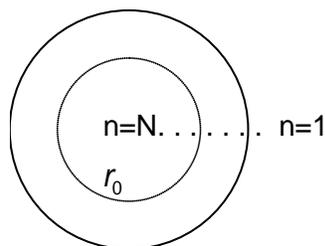
$$\bar{\sigma}^* = \begin{bmatrix} (\alpha + 2\beta) \cdot a + \beta \cdot c & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha + 2\beta) \cdot a + \beta \cdot c & \frac{\alpha}{2} b \cdot r \\ 0 & \frac{\alpha}{2} b \cdot r & 2\beta \cdot a + (\alpha + \beta) \cdot c \end{bmatrix} \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & \frac{b}{2} r \\ 0 & \frac{b}{2} r & c \end{bmatrix}$$

En donde:

$$\bar{\sigma}^* = \frac{1}{E} \bar{\sigma}, \quad \alpha = \frac{1}{1+\nu} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2 \cdot \nu)}$$

### Método de resolución

Con el propósito de facilitar la resolución del problema, la localización del frente de plasticidad se establecerá arbitrariamente, por consiguiente será necesario determinar la magnitud del momento requerido para situar el frente de plasticidad a la distancia  $r_0$  preestablecida. El mallado que se emplea es el mostrado en la figura 2.



**Figura 2. División de la sección transversal en N-1 partes de espesor constante. El punto n=1 se localiza en el borde de la barra y el frente de plasticidad se sitúa sobre algún punto del conjunto  $1 < n \leq N$ .**

Para la resolución del caso elástico-plástico se utilizó el método de Newton-Rapson y la programación se llevó a cabo en MATLAB 6.5. Como punto inicial fue necesario clasificar las

ecuaciones obtenidas en lineales y no lineales, perteneciendo a este ultimo grupo solo las ecuaciones E1.11 y E1.12. La lógica del algoritmo es sencilla; un diagrama de flujo de dicho algoritmo se encuentra en la figura 3. Una vez ingresados los datos, se linealizan las ecuaciones E1.11 y E1.12. Para  $n=1$  el frente de plasticidad se ubica justo sobre el borde de la barra y se aplican las ecuaciones obtenidas del caso puramente elástico; no obstante la carga axial es fija, por lo tanto,  $\sigma_{23}$  esta obligado a satisfacer el criterio de plasticidad en el borde. No se calcula el caso  $n=2$  debido a que se consideraron por lo menos tres puntos para la aproximación del valor de la derivada. Como primer paso cuando  $n>2$ , se ajustan los valores que serán inyectados a la parte linealizada del problema, con el propósito de que dichos valores pertenezcan a la región definida por la parte no lineal. Una vez que ha concluido el paso anterior se realiza la solución de la parte lineal. Si la solución obtenida cumple con la tolerancia los datos son almacenados, en caso contrario se realiza otra iteración hasta lograr que la solución converja.

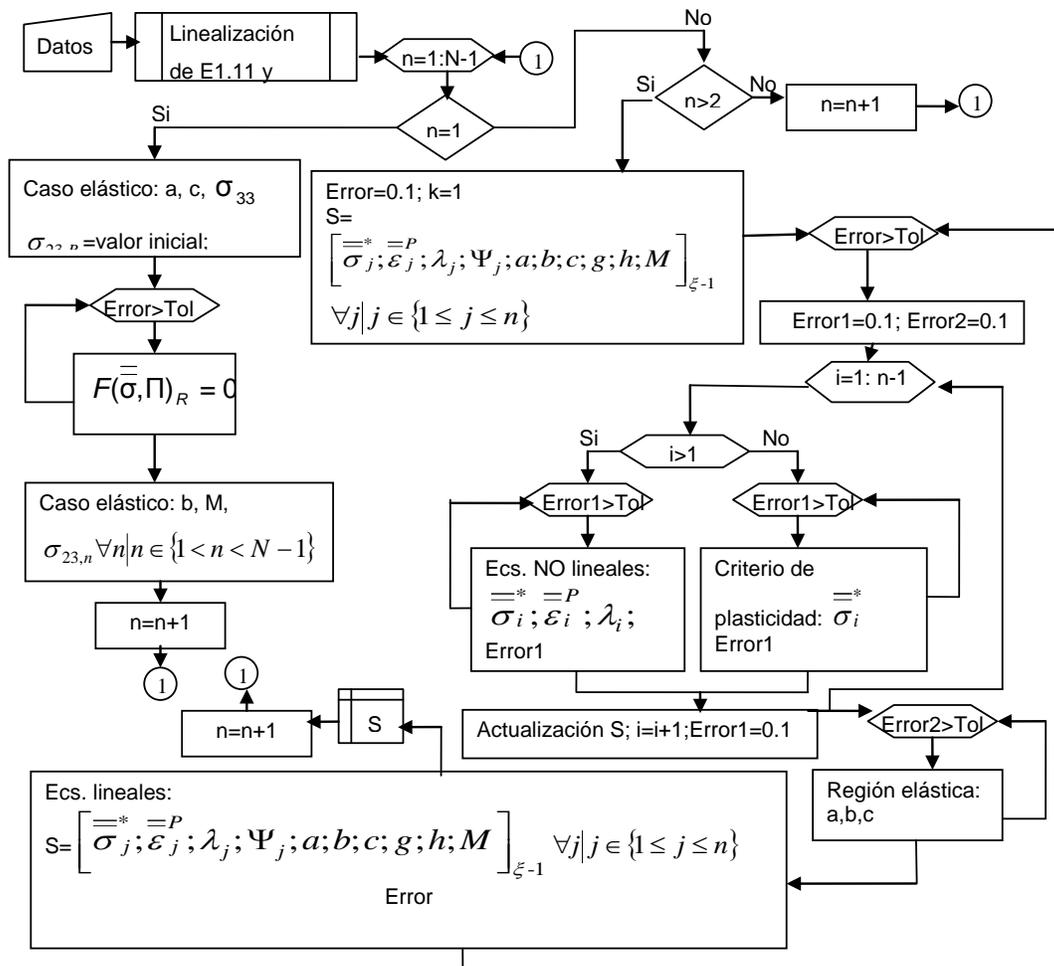


Figura 3. Diagrama de flujo del algoritmo empleado

## Resultados

A continuación, se muestran los resultados obtenidos con la geometría y propiedades de una probeta ensayada en laboratorio. En la tabla 1, se listan los datos de entrada para los cálculos.

Propiedad ó dimensión	Valores
Radio de la probeta	R=4.27 mm
Longitud de la probeta	L=46 mm
Módulo de elasticidad	E=0.8 GPa
Coeficiente de Poisson	0.33
Fuerza axial normalizada en la dirección de Z	Fz=0
Número de puntos del mallado	N=20
Tamaño del mallado	T=R/(N-1)
Tolerancia	Tol=1e-6
Criterio	$F=sEQ-K*(1+3000*p)$ donde p es la deformación plástica acumulada, sEQ el esfuerzo de Von-Mises

**Tabla 1. Datos de entrada**

En la figura 4, se muestran los resultados de la deformación plástica en función de la posición radial para un torque de 2Nm.

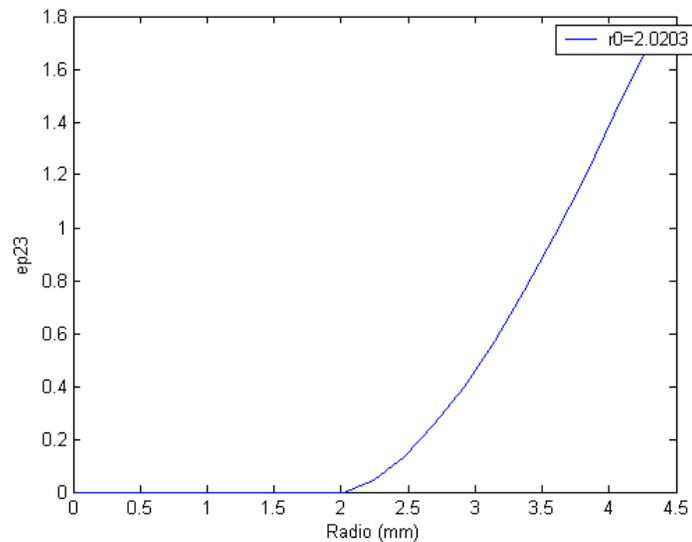


Figura 4. Distribución de  $\epsilon_{23}^P$  en la sección transversal de la barra.

En la figura 5, se muestran los resultados del esfuerzo cortante en función de la posición radial para un torque de 2Nm. Se puede apreciar el efecto del endurecimiento en la zona plástica (para un radio mayor a 2mm)

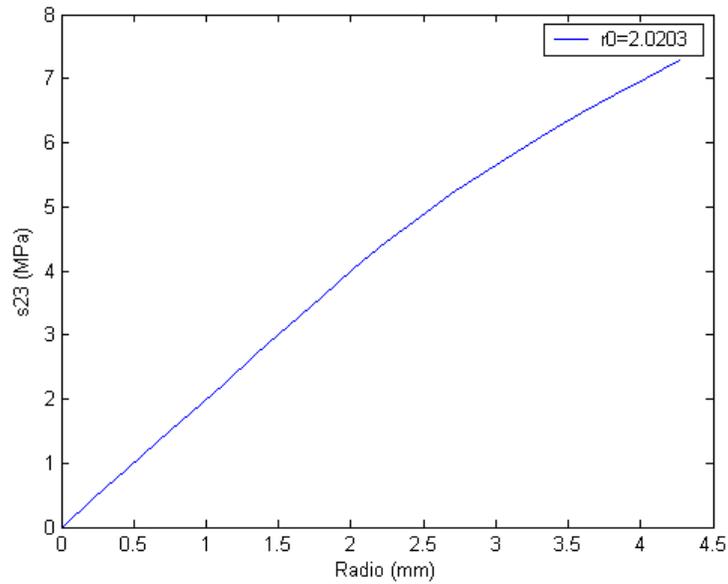


Figura 5. Distribución del esfuerzo  $\sigma_{23}$  en la sección transversal de la barra.

En la figura 6, se muestra la gráfica del momento en función de la posición radial del frente de plasticidad. Se puede apreciar que no existe proporcionalidad entre ambos.

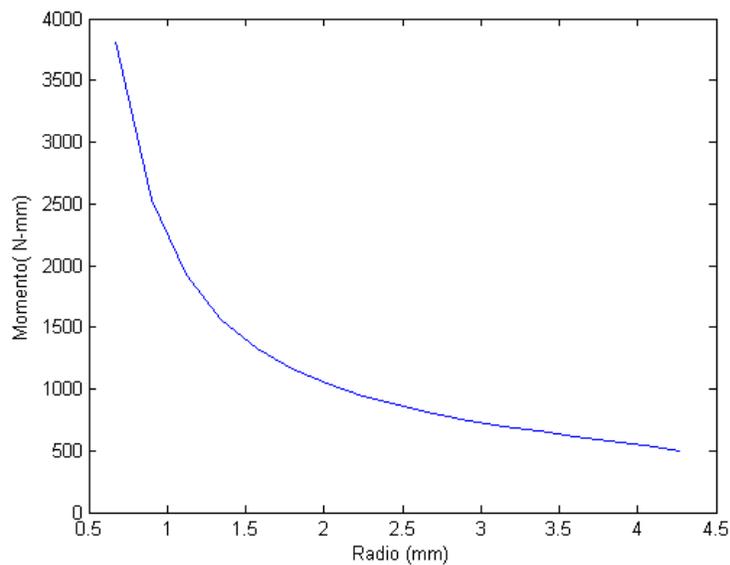


Figura 6. Torque en función de la ubicación radial del frente de plasticidad

Por último es importante señalar que se realizaron comparaciones entre nuestro modelo y el software de elementos finitos COMSOL. Se obtuvieron los mismos resultados pero con nuestro método el tiempo de cálculo es 100 veces menor.

### Comparación con un resultado experimental

En la figura 8 se compara el valor teórico de torque vs. ángulo de torsión, en color rosa, con respecto al obtenido en laboratorio. Sus propiedades son las mismas que los datos de entrada del programa. Se puede apreciar una excelente correlación entre ambos resultados. Además, se observa que el adhesivo presenta deformaciones angulares muy altas.

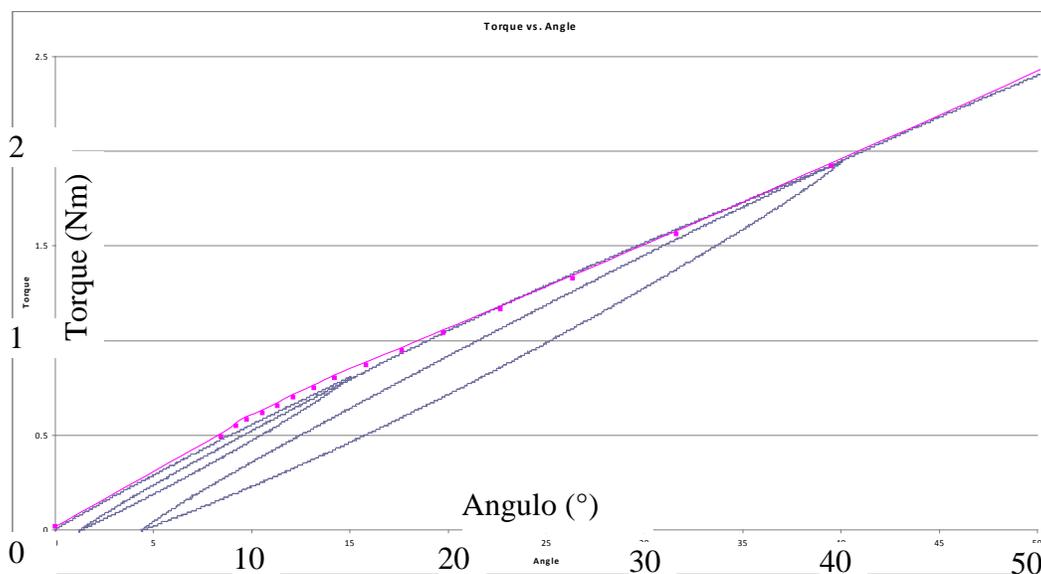


Figura 8. Torque vs ángulo de torsión

### Conclusiones

- El algoritmo propuesto muestra una amplia ventaja en cuanto a tiempo de cómputo empleado para la realización de los cálculos en comparación a un software de elementos finitos comercial.
- Aunque no se han realizado las pruebas de laboratorio suficientes para la determinación del criterio, se puede observar la gran versatilidad del software al ir implementando modificaciones al criterio.
- Un resultado experimental preliminar muestra que el adhesivo tiene un comportamiento plástico con endurecimiento.

## **Agradecimientos.**

Los autores agradecen al CONACYT y a US Air Force por su apoyo financiero.

## **Referencias**

1. Ward, I.M.; Hadley, D.W. 1993. An introduction to the mechanical properties of solids polymers. John Wiley and Sons Ltd, England, 234-237 p.
2. Wang, C.H.; Rose L.R.F. 1997. Determination of triaxial stress in bonded joints. *Journal of Adhesion and Adhesives* 17 (1997) 17-25
3. Wang, C.H.; Chalkley P. 2000. Plastic yielding of a film adhesive under multiaxial stresses. *Journal of Adhesion and Adhesives* 20 (2000) 155-164