

## **Le modèle LS1 appliqué à la propagation du délaminage aux interfaces $0^\circ/45^\circ$ : comparaisons avec des résultats expérimentaux et éléments finis 3D**

### ***The LS1 model for delamination propagation, experimental and 3D F.E comparisons***

**Achille Lerpiniere<sup>1</sup>, Jean-François Caron<sup>1</sup>, Alberto Diaz Diaz<sup>2</sup>, Karam Sab<sup>1</sup>**

1 : Laboratoire Navier (École des Ponts ParisTech, IFSTTAR, CNRS)  
Université Paris-Est  
École des Ponts Paristech, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, 77455, Marne-la-Vallée, France  
e-mail : caron@enpc.fr

2 : Departamento MIE,  
CIMAV  
Complejo Industrial Chihuahua Chihuahua, México C.P. 31109  
e-mail : alberto.diaz@cimav.edu.mx

### **Résumé**

Le but de cet article est d'analyser le délaminage des plaques multicouches sous chargements classiques en utilisant une approche numérique alternative aux méthodes éléments finis tridimensionnelles. Le modèle alternatif proposé est un modèle « layerwise » en contraintes. On utilise ici des données expérimentales et des résultats éléments finis 3D provenant d'une étude de Prombut et al. [17], concernant différentes éprouvettes de délaminage classiques, de type asymmetric double cantilever beam (ADCB) et asymmetric mixed-mode flexure (AMMF), et deux types d'interfaces délaminées  $0^\circ/0^\circ$  et  $0^\circ/45^\circ$ . On compare les résultats avec ceux obtenus par EF 3D et avec le code aux éléments finis MPFEAP, qui est basé sur le modèle proposé, notamment en calculant les taux de restitution d'énergie de déformation (SERR dans la suite pour Strain Energy Release Rate). On montrera que les SERR peuvent être déduits de manière analytique à partir des contraintes d'interface intrinsèques aux équations du modèle. Plusieurs comparaisons sont présentées dans ce travail, et les résultats SERR MPFEAP sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux et EF 3D. La mixité de mode, malgré la simplicité du maillage et le faible temps de calcul, est en particulier très bien captée. Les détails se trouvent dans [14].

### **Abstract**

The aim of this paper is to analyze delaminated multilayered plates under classical loads using an alternative model to the existing three-dimensional finite element methods (3D-FEM). The proposed alternative model, named *LSI*, is a layerwise stress model proving significantly less computationally expensive while accurate and efficient. In particular this paper uses experimental data from different simple test specimens in a finite element code, which is based on *LSI*, in order to calculate strain energy release rates (SERR) in different modes of delamination. The focus is on two types of delaminated interfaces  $0^\circ/0^\circ$  and  $0^\circ/45^\circ$ . The obtained SERR results are in very good agreement with the experimental values and, in the case of mixed-mode delamination, they are as accurate as the SERR obtained by 3D-FE models. The other interesting property of the *LSI* model is the very fast calculation speed as the SERR can be analytically deduced from interfacial stresses. This relation which only depends on the stacking sequence and the position of delamination is presented.

**Mots Clés:** Modèles layerwise, critère délaminage, contrainte d'interface, taux de restitution d'énergie  
**Keywords:** Multilayer, Layerwise model, Delamination criterion, Interlaminar stresses

# 1 Introduction

Le délaminage reste un endommagement très critique pour les matériaux multicouches, provoquant baisses de rigidité et de résistance importantes. Plusieurs méthodes et critères existent pour prendre en compte ces effets 3D, introduisant par exemple la mécanique de l'endommagement avec des interfaces imparfaites et des zones cohésives, des considérations énergétiques et la mécanique linéaire de la rupture, le concept de taux de restitution d'énergie (en décrivant le délaminage comme une fissure entre deux couches[8]). Les méthodes dites virtual crack closure technique (VCCT), virtual crack extension (VCE) et J-integral techniques sont alors couplées à des méthodes EF. D'autres encore font porter les critères directement sur des contraintes ou déformations, hors planes le plus souvent et introduisent des valeurs seuils, qui dépendent des séquences d'empilement, des orientations et des épaisseurs de plis.

La difficulté est due à l'aspect très singulier des champs 3D au niveau de ces délaminages, et leur estimation numérique reste problématique tant les raffinements, le long du délaminage et dans l'épaisseur des couches voisines, et les effets maillages sont importants et sensibles. On fait appel souvent à des dimensions ou volumes caractéristiques pour estimer des valeurs moyennes ou à des comportements régularisants [22, 11] comme la plasticité par exemple. La définition de ces dimensions caractéristiques doit être bien identifiée.

Une autre solution est l'utilisation d'approches plus intégrées, 2D voir 1D, plaques ou poutres multicouches. Le délaminage a été ainsi étudié avec des approches de type classical laminate theory (CLT) et appliqué sur des éprouvettes de fissuration classiques de type DCB (Double-cantilever beam), ELS (End Loaded split) ou MMF (Mixed-Mode Flexure) [13]. Des approches plus riches, dites first-order shear deformation theories (FSDT) ont aussi été proposées [19]. [2] par exemple utilise un assemblage de plaques FSDT connectées par des interfaces élastiques et calcule des taux de restitution d'énergie, d'autres utilisent des théories de plaques d'ordres supérieurs, mais les conditions de continuités aux interfaces sont rarement vérifiées, ou des théories layerwise, une cinématique par couche (et non plus une seule globale à la plaque) qui sont généralement en déplacement approchés ou mixtes et peuvent ou non vérifier ces conditions de continuité.

L'approche proposée appartient à cette dernière famille, est purement basée sur une approximation des contraintes (contraintes membranaires affines par couches), et vérifie les conditions de continuité aux interfaces. Déjà détaillé dans [4, 7, 3, 6, 15], ce modèle est nommé *LSI* en référence à la nomenclature de Carrera [5] (Layerwise, Stress approach, ordre 1). Directement inspiré des travaux de Pagano [16], il peut être décrit comme un assemblage de plaques de Reissner connectées par des efforts d'interfaces (cisaillements et arrachement), qui sont des inconnus du problème et exactement les contraintes 3D hors plan aux interfaces. On trouvera des détails par exemple dans [21]. Un élément fini associé, MPFEAP (Multi-Particular Finite Element Program), a été développé [15] sous *GID*, et donne donc accès aux contraintes d'interface qui vont pouvoir directement qualifier le chargement de cette interface. Cela permet d'éviter des descriptions EF 3D (dans l'épaisseur) qui de plus, sans usage d'éléments spécifiques (zone cohésif) ne permettent que d'approcher ces contraintes via les contraintes dans les couches voisines. Des développements analytiques ont été proposés pour modéliser le délaminage en bord libre (mode III) [8, 18]. On montre que l'initiation peut-être prédit par un critère mixte (contrainte et  $G_c$ ) et que la propagation peut l'être via un critère en énergie.

L'étude présentée ici éprouve la pertinence du modèle en mode I, II et en mode mixte. On utilise pour les comparaisons avec MPFEAP des données expérimentales et des résultats éléments finis 3D provenant d'une étude de Prombut et al. [17], concernant différentes éprouvettes de délaminage classiques, de type asymmetric double cantilever beam (ADCB) et asymmetric mixed-mode flexure (AMMF), et deux types d'interfaces délaminées  $0^\circ/0^\circ$  et  $0^\circ/45^\circ$ . Les taux de restitution d'énergie  $G$  aux interfaces considérées sont calculées analytiquement via le modèle et pour chaque mode, et la mixité analysée. Les détails se trouvent dans [14].

## 2 Description of the *LSI* model

Ce modèle brièvement décrit ici est spécifiquement adapté pour l'étude des interfaces, et une alternative aux descriptions 3D (dans l'épaisseur), coûteuses car difficiles à mailler à cause des singularités et gradients, et tant les dimensions et les caractéristiques sont différentes dans les 3 directions. La construction du modèle est détaillée dans les publications de Nguyen.V.T (par exemple [15]). Ici, on rappelle simplement que ce modèle est obtenu à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner. Pagano [16] a proposé d'exprimer les composantes des champs de contrainte comme des polynômes en  $z$ , dont les coefficients s'expriment en fonction des efforts généralisés, par exemple tensions  $N_{\alpha\beta}^i$ , moments  $M_{\alpha\beta}^i$ , efforts tranchants  $Q_\alpha^i$ , dans chaque couche. Il propose des contraintes membranaires approchées de degré 1 en  $z$ .

$$\sigma_{\alpha\beta}^{app} = N_{\alpha\beta}^i \frac{P_0^i}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i P_1^i \quad (1)$$

où :  $P_0^i = 1$ ,  $P_1^i = \frac{z - \bar{h}_i}{e^i}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$

Naturellement, les contraintes transverses (cisaillements transverses et contraintes normales) dans chacune des couches peuvent être harmonisées, et des expressions polynomiales proposées cohérentes avec le choix membranaire précédent. Ainsi respectant l'équilibre  $\sigma_{ij,i}$ , on propose des expressions paraboliques pour les cisaillements et du troisième ordre pour la contrainte normale. Les constantes d'intégration qui apparaissent dans la détermination de ces contraintes hors-plans peuvent être déduites des conditions de continuité au niveau des interfaces. Pagano propose plutôt de conserver la vision 2D de la plaque et de focaliser sur les interfaces. Il définit ainsi trois outils de mesures mécaniques (efforts internes dans l'équation d'équilibre généralisé) situés précisément au niveau des positions des interfaces, nouvelles inconnues du problème évitant l'écriture de la continuité (vérifiée ici par défaut) pour le calcul des constantes d'intégration. Ces outils d'interface sont 2 contraintes de cisaillement généralisées  $\tau^{j,j+1}$  et une contrainte normale généralisée  $v^{j,j+1}$  comme suit:

$$\tau_\alpha^{j,j+1}(y) = \sigma_{\alpha 3}(y, h_j^+) \quad \text{et} \quad v^{j,j+1}(y) = \sigma_{33}(y, h_j^+). \quad (2)$$

Ces efforts internes, inconnues du problème de plaque 2D peuvent ainsi être calculés directement, sans post-traitement. Si on veut calculer les contraintes 3D dans les couches, le post-traitement peut être réalisé. On détaille alors l'expression finale de ces contraintes 3D qui permettra si on le souhaite de décrire les contraintes dans l'épaisseur et non uniquement au niveau des interfaces (à noter, que l'on peut également discrétiser artificiellement l'épaisseur pour capter des contraintes dans les couches, ce qui évite le post-processing):

$$\sigma_{\alpha 3}^a = Q_\alpha^i \frac{P_0^i}{e^i} + \left( \tau_\alpha^{i,i+1} - \tau_\alpha^{i-1,i} \right) P_1^i + \left( Q_\alpha^i - \frac{e^i}{2} \left( \tau_\alpha^{i,i+1} + \tau_\alpha^{i-1,i} \right) \right) \frac{P_2^i}{e^i} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^a &= \left( \frac{v^{i,i+1} + v^{i-1,i}}{2} + \frac{e^i}{12} \text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) P_0^i \\ &+ \left( \frac{e^i}{10} \text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) - \frac{\text{div}\tilde{Q}^i}{5} + v^{i,i+1} - v^{i-1,i} \right) P_1^i \\ &+ \frac{e^i}{12} \text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) P_2^i + \left( \frac{e^i}{2} \text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) - \text{div}\tilde{Q}^i \right) P_3^i. \end{aligned} \quad (4)$$

Où  $(P_k^i)_{0 \leq k \leq 3}$  est défini comme suit:

$$\begin{aligned} P_0^i &= 1, P_1^i = \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} P_2^i = 6 \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2} \\ \text{et} \quad P_3^i &= -2 \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 \end{aligned}$$

En exprimant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger Reissner on trouve par dualité les déplacements et déformations généralisées associées à ces efforts de plaque, ainsi qu'équilibre et comportement généralisé de plaque (voir par exemple [15]). Il est à souligner qu'à aucun moment il n'a été besoin de proposer une approximation des champs de déplacements 3D, en complément de l'approximation en contrainte, c'est à dire de suivre la démarche mixte classique, qui peut tendre à rigidifier le système. On cite ainsi Pagano ([16] p.389) "Note that we refrain from assuming the form of the displacement field in accordance with the objectionable features of that approach". Cette approche utilise donc une formulation mixte dans la méthode de construction mais reste une approche exclusivement en contrainte. C'est pourquoi il a été choisi de rajouter un S à la nomenclature de Carrera.

Pour la suite il est nécessaire de préciser la forme des équations de comportement à l'interface  $i, i + 1$  exhibées par le modèle:

- Interlaminar shear behavior:

$$D_{\alpha}^{i,i+1} = -\frac{1}{10} \left( S_{Q\alpha\beta}^i Q_{\beta}^i + S_{Q\alpha\beta}^{i+1} Q_{\beta}^{i+1} \right) - \frac{1}{30} \left( e^i S_{Q\alpha\beta}^i \tau_{\beta}^{i-1,i} + e^{i+1} S_{Q\alpha\beta}^{i+1} \tau_{\beta}^{i+1,i+2} \right) + \frac{2}{15} \left( e^i S_{Q\alpha\beta}^i + e^{i+1} S_{Q\alpha\beta}^{i+1} \right) \tau_{\beta}^{i,i+1} \quad (5)$$

- Interlaminar normal behavior:

$$D_z^{i,i+1} = \frac{9}{70} \left( e^i S_v^i v^{i-1,i} + e^{i+1} S_v^{i+1} v^{i+1,i+2} \right) + \frac{13}{35} \left( e^i S_v^i + e^{i+1} S_v^{i+1} \right) v^{i,i+1} \quad (6)$$

Où  $D_{\alpha}^{i,i+1}$  et  $D_z^{i,i+1}$  sont les déformations généralisées exhibées par le développement du modèle et associées énergétiquement aux efforts d'interfaces respectivement,  $\tau_{\alpha}^{i,i+1}$  et  $v^{i,i+1}$ ,  $S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i$ ,  $S_{Q\alpha\beta}^i$  et  $S_v^i$  sont les composantes de la matrice de complaisance de la couche  $i$ .

## 2.1 LSI pour le délaminage

Ci-dessus, les interfaces sont considérées comme parfaites, car les efforts d'interfaces sont dues exclusivement aux déplacements et déformations généralisées des couches voisines. Mais ces contraintes peuvent être aussi influencés par des effets locaux. Dans [7] des glissements élastiques ou plastiques sont localisés à l'interface même, dans [10] sont pris en compte des comportements d'interface réellement physique, car épaisse ou élastoplastique (colle par exemple). On doit alors modifier les équations (5) and (6), les comportements d'interface doivent mettre en évidence cette nouvelle complexité. On introduit ainsi  $\gamma_i^{k,k+1}$  qui représentent les déplacements locaux dus à l'interface elle même, ces trois composantes pouvant être élastique ou plastique par exemple:

- Interlaminar shear behavior:

$$D_{\alpha}^{k,k+1} - \gamma_{\alpha}^{k,k+1} = -\frac{1}{10} \left( S_{Q\alpha\beta}^k Q_{\beta}^k + S_{Q\alpha\beta}^{k+1} Q_{\beta}^{k+1} \right) - \frac{1}{30} \left( e^k S_{Q\alpha\beta}^k \tau_{\beta}^{k-1,k} + e^{k+1} S_{Q\alpha\beta}^{k+1} \tau_{\beta}^{k+1,k+2} \right) + \frac{2}{15} \left( e^k S_{Q\alpha\beta}^k + e^{k+1} S_{Q\alpha\beta}^{k+1} \right) \tau_{\beta}^{k,k+1} \quad (7)$$

- Interlaminar normal behavior:

$$D_z^{k,k+1} - \gamma_z^{k,k+1} = \frac{9}{70} \left( e^k S_v^k v^{k-1,k} + e^{k+1} S_v^{k+1} v^{k+1,k+2} \right) + \frac{13}{35} \left( e^k S_v^k + e^{k+1} S_v^{k+1} \right) v^{k,k+1} \quad (8)$$

Les différents type de représentation d'interface déjà proposés par les auteurs peuvent être résumés dans le tableau suivant (Tableau 1), on trouvera dans les références les équations et des cas d'application.

Type	Denomination	Details and references
A	Elastic composite ( <i>LSI</i> )	Perfect interface (infinite rigidity) [4]
B	Elastic composite with elastic interface	Interface with zero thickness and isotropic stiffness (9) and (10) [10]
C	Elastic composite with plastic slips	Interface with zero thickness and a perfectly plastic law for interfacial slips [9]
D	Elastic composite with elastoplastic interface	Interface with non-zero thickness and elastoplastic behavior [10]

Table 1: Type of interfacial behaviors and *LSI* corresponding references

Dans ce papier, pour l'étude des poutres délaminées, des interfaces de type B seront considérées. Le type B décrit des interfaces élastiques, pouvant être décrites par 3 ressorts purement élastiques, de raideurs  $k_x^{k,k+1}$ ,  $k_y^{k,k+1}$  et  $k_z^{k,k+1}$ , reliées aux déformations d'interface dans les équations 9 et 10 (voir [10]). Pour la part d'interface non délaminée, des rigidités très grandes (quasi infinies) sont utilisées (très proche d'un type A), alors que pour la part délaminée, des rigidités proches de 0 sont choisies. Il a été vérifié que les choix arbitraires de ces valeurs extrêmes n'influençaient pas les calculs.

$$\begin{bmatrix} \gamma_x^{k,k+1} \\ \gamma_y^{k,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/k_x^{k,k+1} & 0 \\ 0 & 1/k_y^{k,k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_x^{k,k+1} \\ \tau_y^{k,k+1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\gamma_z^{k,k+1} = \frac{v^{k,k+1}}{k_z^{k,k+1}} \quad (10)$$

Basé sur ce modèle *LSI*, un élément fini  $C^0$  à 8 noeuds, isoparamétrique et quadrilatéral avec 5n d.o.f par noeud a été développé [15] et permet le calcul statique et dynamique de problèmes de plaques avec interface de type A, B et D. La géométrie est maillée dans son plan.

### 3 Application à des poutres délaminées

Le *LSI* est testé sur des configurations classiques de poutres fissurées. Les cas d'étude proviennent du travail de [17] et permet des comparaisons avec des résultats expérimentaux et EF 3D.

L'étude concerne des unidirectionnels (UD) et multidirectionnels (MD) et les interfaces  $0^\circ/0^\circ$  et  $0^\circ/45^\circ$ . On détermine le strain energy release rate (SERR) critique en mode I,  $G_{Ic}$  sur poutre (DCB), sur ELS (end loaded split) pour pur mode II,  $G_{IIc}$ , sur asymmetric double cantilever beam (ADCB) et asymmetric mixed-mode flexure (AMMF) pour obtenir du mode mixte I + II.

Les empilements non unidirectionnels sont soigneusement choisis [17] pour minimiser les couplages dans les bras 1 et 2 des poutres et les couplages thermiques. L'empilement finalement choisi et nommé dans la suite (ADCB18) est le suivant où "/" représente la position du délaminage:

0/45/ - 45/ - 45/45/0//45/0/ - 45/0/ - 45/ - 45/45/45/0/45/0/ - 45

Le matériau est carbon-epoxy (T700/M21):

$$\begin{aligned} E_L &= 98.62 \text{ GPa}, E_T = E_N = 7.69 \text{ GPa} \\ G_{LT} &= G_{LN} = 4.75 \text{ GPa}, G_{TN} = 4.75 \text{ GPa} \\ \nu_{LT} &= \nu_{LN} = 0.3, \nu_{TN} = 0.3, e^i = 0.26 \text{ mm} \end{aligned}$$

Le *LSI* permet une mesure directe de l'intensité de la concentration de contrainte en pointe de fissure car une valeur finie au bord est fournie. L'intégration des champs sur l'épaisseur des couches exhibe une dimension caractéristique (l'épaisseur de la couche) et rejoint ainsi un peu d'autres méthodes "régularisante" (average stress concept [1, 22]), [11, 20]...). Le maillage pour obtenir convergence est donc assez simple et grossier, ici un 5x20, 2D plan, (figure 1) avec un raffinement en pointe suffit.

Un 12 couches UD, en DCB et ADCB et un 18 couches 18-layers multidirectionnel ADCB tels que définis précédemment sont calculés et les ouvertures pour différentes longueurs de fissures sont



Figure 1: typical 2D-mesh of a test specimen

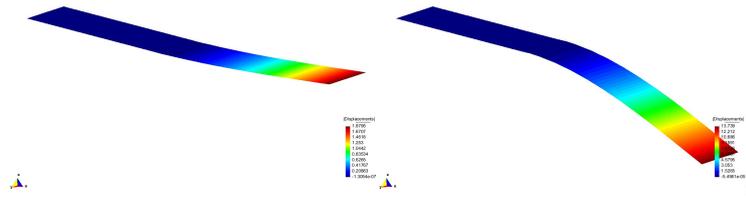


Figure 2: deformed model and displacements values of top and bottom layers for unidirectional ADCB delaminated specimen

compérées aux EF 3D et résultats expérimentaux de Prombut &al. [17] (Figure 2, pour le ADCB UD et une fissure de  $a = 95mm$ ).

Le tableau 2 rassemble par exemple les charges expérimentales moyennes,  $P$ , les ouvertures  $\delta - EXP$  obtenues pour plusieurs longueurs de fissure, ainsi que les déplacements obtenus par EF , 3D pour [17] et 2D avec *MPFEAP*, respectivement  $\delta - 3DFE$  et  $\delta - MPFEAP$ , pour la ADCB18. Les résultats *LSI* sont très bons ( écart avec le 3D < 7% ) et ce avec un maillage assez grossier.

#### 4 Calcul du taux de restitution d'énergie $G$ , et détermination des ratios de mode

Les simulations éléments-finis 3D utilisées et issues du travail de Prombut [17] utilisent et la méthode dite virtual crack extension (VCE) et celle dite virtual crack closure technique (VCCT). La première sépare le noeud en pointe en deux noeuds dont les mouvements relatifs et les efforts nodaux associés permettent de déterminer le  $G$ . et la décomposition de mode en calculant la variation d'énergie potentielle du système. Cette méthode nécessite deux calculs pour simuler chaque avancée de fissure. La technique VCCT utilise l'hypothèse d'invariance de la perturbation liée à l'avancée de fissure  $\delta a$ , et calcule l'énergie localisée nécessaire à la refermeture de la fissure, ce qui permet de réduire l'effort de calcul.

ADCB18	a(mm)/P(N)	85/26.21	90/25.17	95/24.82	100/24.28	105/22.83
	$\delta$ -EXP(mm)	15.01	16.93	19.32	22.37	23.87
	$\delta$ -3DFE(mm)	13.23	14.98	17.24	19.54	21.19
	$\delta$ -MPFEAP(mm)	12.63	14.31	16.51	18.75	20.33

Table 2: Simulated and experimental displacements for different crack lengths of multidirectional ADCB specimen

#### 4.1 Méthode VCCT via une formulation LSI[8]

Le SERR (G) et la répartition de mode peuvent être calculés efficacement via le modèle LSI et la méthode VCCT. En effet le calcul analytique de ce G est possible (écriture de la variation d'énergie pour refermer la fissure) pour un mode donné, et apparaît comme une fonction des efforts d'interface du modèle  $\tau_x^{k,k+1}$ ,  $\tau_y^{k,k+1}$  et  $v^{k,k+1}$  (définis éq. 2) à l'interface  $k, k+1$ , et de fonctions  $\Psi$  ne dépendant que de la séquence d'empilement et de la position du délaminage. En particulier, les  $\Psi$  ne dépendent ni du chargement, ni de la géométrie globale de la plaque, ni de la longueur de fissure. C'est une propriété très intéressante car permettant d'obtenir analytiquement sur des configurations simples le calcul des G [8, 18]. Ici il est montré que sur des configurations plus complexes, le calcul des G ne nécessite que le calcul des contraintes d'interfaces avec MPFEAP puisque les fonctions  $\Psi$  sont calculées une fois pour toute et analytiquement pour l'empilement délaminé considéré, même si la fissure se propage ou les conditions limites et chargement changent.

La méthode VCCT est ainsi utilisée avec les efforts  $\tau_x^{k,k+1}$ ,  $\tau_y^{k,k+1}$  and  $v^{k,k+1}$  et les glissements relatifs d'interface associés  $\gamma_x^{k,k+1}$ ,  $\gamma_y^{k,k+1}$  et  $\gamma_z^{k,k+1}$  (introduits § 2.1) à l'interface délaminée  $k, k+1$ , et l'on obtient les équations suivantes pour  $G_I$ ,  $G_{II}$  and  $G_{III}$  ([8]):

$$G_I = \frac{1}{2} v^{k,k+1} \gamma_z^{k,k+1} \quad (11)$$

$$G_{II} = \frac{1}{2} \tau_x^{k,k+1} \gamma_x^{k,k+1} \quad (12)$$

$$G_{III} = \frac{1}{2} \tau_y^{k,k+1} \gamma_y^{k,k+1} \quad (13)$$

Il est possible d'exprimer les glissements d'interface  $\gamma_x^{k,k+1}$ ,  $\gamma_y^{k,k+1}$  et  $\gamma_z^{k,k+1}$  en fonction des efforts d'interface  $\tau_x^{k,k+1}$ ,  $\tau_y^{k,k+1}$  et  $v^{k,k+1}$  et apparaissent alors les 5 fonctions  $\psi$ ,  $\psi^v$ ,  $\psi_{xx}^\tau$ ,  $\psi_{xy}^\tau$ ,  $\psi_{yy}^\tau$  et  $\psi_{yx}^\tau$  [8]. On obtient alors:

$$G_I = \psi^v (v^{k,k+1})^2 \quad (14)$$

$$G_{II} = \psi_{xx}^\tau (\tau_x^{k,k+1})^2 + \psi_{xy}^\tau \tau_y^{k,k+1} \tau_x^{k,k+1} \quad (15)$$

$$G_{III} = \psi_{yy}^\tau (\tau_y^{k,k+1})^2 + \psi_{yx}^\tau \tau_x^{k,k+1} \tau_y^{k,k+1} \quad (16)$$

Ces relations, (14) à (16), sont générales et pour n'importe quel empilement délaminé. Si il y a plusieurs fissures, il suffit de zoner l'empilement. Les équations, reliant les G aux carrés des contraintes d'interface, et aux données matériaux, rappellent celles reliant G aux facteurs d'intensité de contraintes  $K$  et proposées par Irwin [12], par exemple pour un matériau isotrope fissuré:

$$G_I = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad (17)$$

$\tau_x^{k,k+1}$ ,  $\tau_y^{k,k+1}$  et  $v^{k,k+1}$  semblent présenter un sens physique proche de celui lié à  $K$ , ce qui explique pourquoi ils sont des bons prétendants à la mesure "finie" des intensités de contraintes en pointe de fissure ou autres singularités, comme nous l'avons montré dans d'autres articles [7][9], et en faisant porter des critères de délaminage sur ces contraintes d'interface.

## 5 Application à l'étude de cas

La répartition de mode est donc étudiée via ces approches sur des éprouvettes DCB, ELS, MMF et ADCB unidirectionnelles et sur la multidirectionnelle ADCB18 comme dans [17]. Les maillages 3D (déformations planes) utilisés pour les éprouvettes fissurées dans [17] ont un élément par couche et un fort raffinement en pointe de fissure

Dans la suite sont référencés comme *G-3DFE* les résultats issus de ces calculs 3D.

Concernant les calculs avec MPFEAP, les maillages 2D dans le plans sont identiques à ceux figure 1. Le calcul des  $\tau_x^{k,k+1}$ ,  $\tau_y^{k,k+1}$  et  $v^{k,k+1}$  est alors réalisé et les G critiques, correspondant aux mesures

	<i>method</i>	<i>G – EXP</i>	<i>G – 3DFE</i>	<i>G – MPFEAP</i>
<i>DCB18U<sub>85</sub></i>	$G_I(J/m^2)$	392	421	409
<i>ELS18U<sub>85</sub></i>	$G_{II}(J/m^2)$	1211	1141	1176

Table 3: Average experimental compared to finite element SERR values for *DCB18U<sub>85</sub>* and *ELS18U<sub>85</sub>* test configurations

<i>MMF18U<sub>85</sub></i>	<i>method</i>	<i>G – EXP</i>	<i>G – 3DFE</i>	<i>G – MPFEAP</i>
	$G_I(J/m^2)$	385	547	340
	$G_{II}(J/m^2)$	290	277	329

Table 4: Average experimental compared to finite element SERR values for *MMF18U<sub>85</sub>* test configuration, with same  $\psi^V$  and  $\psi_{xx}^\tau$  as used on *DCB18U<sub>85</sub>* and *ELS18U<sub>85</sub>*

expérimentales, sont déduits via les equations 14- 16, et le calcul préalable et analytique des fonctions  $\psi$ . Les resultats obtenus ainsi dans la suite sont référencés comme *G-MPFEAP*.

## 5.1 Calcul des fonctions $\psi$

Ces fonctions ne dépendant que de l’empilement, des matériaux et de la position de l’interface fissurée peuvent être calculées pour les configurations de l’étude. Par exemple, et pour mieux visualiser leur forme, dans le cas d’un bi-couche DCB:

$$\psi^V = \frac{13}{35}(e^1 S_v^1 + e^2 S_v^2) \quad (18)$$

où  $e^1$  et  $e^2$  sont les épaisseurs des deux bras,  $S_v^1$  et  $S_v^2$  ( ou  $S_{zzz}^i$ ) les composantes normales de la complaisance de chaque couche.

Pour des configurations plus complexes, une résolution numérique des équations est bien entendu nécessaire. Ici pour les cas d’étude,  $\psi^V$  et  $\psi_{xx}^\tau$  sont les seules fonctions impliquées (car  $\tau_y^{k,k+1} = 0$ ) et calculées pour les empilements considérés.

## 5.2 Calcul de G pour différentes configurations et longueurs de fissures

Les fonctions  $\psi^V$  et  $\psi_{xx}^\tau$  sont tout d’abord alors utilisées pour calculer les  $G_I$  and  $G_{II}$  d’une poutre *DCB18U<sub>85</sub>* et *ELS18U<sub>85</sub>* avec un délaminage de 85mm, grâce aux équations 14 et 15, et en utilisant  $\tau_x^{k,k+1}$  et  $v^{k,k+1}$  calculés numériquement via *MPFEAP*. On compare dans le tableau 3, les mesures et les différents modèles. Les résultats *MPFEAP* sont en très bon accord avec les simulations 3D.

Les même fonctions  $\psi^V$  and  $\psi_{xx}^\tau$  sont alors réutilisées pour calculer le même 18 couche unidirectionnel, dans une autre configuration de test, une mixed-mode flexure *MMF18U<sub>85</sub>*. Le tableau 4 valide le fait que ces fonctions ne dépendent que de l’empilement puisque malgré ces changements, les valeurs *G – MPFEAP* approchent très bien les résultats expérimentaux et la mixité de mode (un peu mieux même dans ce cas que l’approche 3D).

Enfin, en calculant d’autres fonctions  $\psi$  on simule d’autres configuration DCB, et ADCB unidirectionnelle et multidirectionnelle telles que décrite §3 pour lesquelles les séquences, chargements, positions de fissures et mixité sont très différentes. Les Tableaux (5), (6) et (7) regroupent l’ensemble des résultats.

DCB	a(mm)/P(N)	45/51.19	50/49.63	55/47.61	60/46.27	65/45.11
	$G_I – EXP(J/m^2)$	426	479	527	560	602
	$G_I – 3DFE(J/m^2)$	451	515	567	629	694
	$G_I – MPFEAP(J/m^2)$	436	494	539	593	645

Table 5: Average experimental compared to finite element SERR values for DCB test configuration

ADCB18	a(mm)/P(N)	85/34.17	90/31.93	95/31.31	100/29.56	105/28.73
	$G_I - EXP(J/m^2)$	321	314	337	332	346
	$G_I - 3DFE(J/m^2)$	327	319	340	335	347
	$G_I - MPFEAP(J/m^2)$	315	304	325	322	335
	$G_{II} - EXP(J/m^2)$	59	58	62	61.5	64
	$G_{II} - 3DFE(J/m^2)$	46	45	48	47	49
	$G_{II} - MPFEAP(J/m^2)$	70	68	73	72	75

Table 6: Average experimental compared to finite element SERR values for ADCB18 unidirectional test configuration

ADCB18	a(mm)/P(N)	85/26.21	90/25.17	95/24.82	100/24.28	105/22.83
	$G_I - 3DFE(J/m^2)$	272	280	301	318	309
	$G_I - MPFEAP(J/m^2)$	273	280	303	320	311
	$G_{II} - 3DFE(J/m^2)$	16	16	17	18	17
	$G_{II} - MPFEAP(J/m^2)$	15	15	16	18	16

Table 7: Finite element SERR values for ADCB18 multidirectional test configuration

## 6 Conclusion

Le délaminage des plaques multicouches sous chargements classiques est étudié en utilisant une approche numérique alternative aux méthodes éléments finis tridimensionnelles. Le modèle alternatif proposé est un modèle « layerwise » en contraintes. On utilise ici des données expérimentales et des résultats éléments finis 3D provenant d'une étude de Prombut et al. [17], concernant différentes éprouvettes de délaminage classiques, de type asymmetric double cantilever beam (ADCB) et asymmetric mixed-mode flexure (AMMF), et deux types d'interfaces délaminées  $0^\circ/0^\circ$  et  $0^\circ/45^\circ$ . On compare les résultats avec ceux obtenus par EF 3D et avec le code aux éléments finis MPFEAP, qui est basé sur le modèle proposé, notamment en calculant les taux de restitution d'énergie de déformation. On a montré que les SERR peuvent être déduits de manière analytique à partir des contraintes d'interface intrinsèques aux équations du modèle et à partir de fonctions  $\Psi$  qui ne dépendent ni du chargement, ni des conditions aux limites, ni de la longueur de fissure, mais juste des données matériaux et empilement. Plusieurs comparaisons sont présentées dans ce travail, et les résultats SERR MPFEAP sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux et EF 3D. La mixité de mode, malgré la simplicité du maillage et le faible temps de calcul, est en particulier très bien capté.

## References

- [1] J.C. Brewer and P.A. Lagace. Quadratic stress criterion for initiation of delamination. *Journal of Composite Materials*, 22(12):1141 – 1155, 1988.
- [2] D. Bruno, F. Greco, and P. Lonetti. A 3d delamination modelling technique based on plate and interface theories for laminated structures. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 24(1):127 – 149, 2005.
- [3] J.F. Caron, A. Diaz Diaz, R.P. Carreira, A. Chabot, and A. Ehlacher. Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Science and Technology*, 66(6):755 – 765, 2006.
- [4] R.P. Carreira, J.F. Caron, and A. Diaz Diaz. Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations. *Mechanics of Materials*, 34(4):217 – 230, 2002.
- [5] E. Carrera. On the use of the murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers & Structures*, 82(7 - 8):541 – 554, 2004.
- [6] A. Diaz Diaz and J-F Caron. Interface plasticity and delamination onset prediction. *Mechanics of Materials*, 38(7):648 – 663, 2006.

- [7] A. Diaz Diaz and J-F Caron. Prediction of the onset of mode III delamination in carbon-epoxy laminates. *Composite Structures*, 72(4):438 – 445, 2006.
- [8] A. Diaz Diaz, J-F Caron, and R-P Carreira. Software application for evaluating interfacial stresses in inelastic symmetrical laminates with free edges. *Composite Structures*, 58(2):195 – 208, 2002.
- [9] A. Diaz Diaz, J-F Caron, and A. Ehrlacher. Analytical determination of the modes I, II and III energy release rates in a delaminated laminate and validation of a delamination criterion. *Composite Structures*, 78(3):424 – 432, 2007.
- [10] V.A. Duong, A. Diaz Diaz, S. Chataigner, and J-F Caron. A layerwise finite element for multilayers with imperfect interfaces. *Composite Structures*, 93(12):3262 – 3271, 2011.
- [11] C. Hochard, N. Lahellec, and C. Bordreuil. A ply scale non-local fibre rupture criterion for CFRP woven ply laminated structures. *Composite Structures*, 80(3):321 – 326, 2007.
- [12] G.R. Irwin. Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24(3):361 – 364, 1957.
- [13] A.J. Kinloch, Y. Wang, J.G. Williams, and P. Yayla. The mixed-mode delamination of fibre composite materials. *Composites Science and Technology*, 47(3):225 – 237, 1993.
- [14] A. Lerpiniere, J-F Caron, A. Diaz-Diaz, and K. Sab. The ls1 model for delamination propagation in multilayered materials at interfaces: A comparison between experimental and finite elements strain energy release rates. *International Journal of Solids and Structures*, 51(23-24):3973 – 3986, 2014.
- [15] V-T Nguyen and J-F Caron. A new finite element for free edge effect analysis in laminated composites. *Computers & Structures*, 84(22 - 23):1538 – 1546, 2006.
- [16] N.J. Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 14(5):385 – 400, 1978.
- [17] P. Prombut, L. Michel, F. Lachaud, and J.J. Barrau. Delamination of multidirectional composite laminates at  $0^\circ/\theta^\circ$  ply interfaces. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(16):2427 – 2442, 2006.
- [18] N. Saeedi, K. Sab, and J-F Caron. Delaminated multilayered plates under uniaxial extension. part I: Analytical analysis using a layerwise stress approach. *International Journal of Solids and Structures*, 49(26):3711 – 3726, 2012.
- [19] A. Szekrenyes. Analysis of classical and first-order shear deformable cracked orthotropic plates. *Journal of Composite Materials*, 2013.
- [20] S.C. Tan. Effective stress fracture models for unnotched and notched multidirectional laminates. *Journal of Composite Materials*, 22(4):322 – 340, 1988.
- [21] N. Duc Thai, M. D’Ottavio, and J-F Caron. Bending analysis of laminated and sandwich plates using a layer-wise stress model. *Composite Structures*, 96(0):135 – 142, 2013.
- [22] J.M. Whitney and R.J. Nuismer. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *Composites Science and Technology*, 8:253 – 265, 1974.