

Solucionador de sistemas de ecuaciones diferenciales unidimensionales por el método del elemento finito.

Axel Fernando Domínguez Alvarado.
Centro de Investigación en Materiales Avanzados S.C.
Av. Miguel de Cervantes No. 120 C.P. 31136
ing.axl89@gmail.com

Alberto Díaz Díaz
Centro de Investigación en Materiales Avanzados S.C.
Av. Miguel de Cervantes No. 120 C.P. 31136
alberto.diaz@cimav.edu.mx

Palabras clave: Elemento finito, Métodos numéricos, Software FEM.

Resumen

En este trabajo se proponen ecuaciones diferenciales generales dependientes de dos dimensiones, una espacial y una temporal. Estas ecuaciones son propuestas de tal manera que se puedan modelar diferentes fenómenos físicos. Se da solución a la parte espacial de las ecuaciones generales mediante el método del elemento finito y a la temporal por medio de series de Taylor, lo que resulta en sistemas lineales con matrices de coeficientes dispersas. Estos sistemas son programados en un lenguaje C++, para tratar con el álgebra de matrices dispersas se utiliza la librería CSparse creada por Timothy A. Davis [1]. Se proponen algunos sistemas de ecuaciones sencillos de resolver analíticamente para comparar resultados con la solución obtenida con lo programado. Una vez comprobada la funcionalidad, se adapta el código para problemas de transferencia de calor y vigas de Euler en el plano. Por último, se proponen problemas de los fenómenos físicos anteriormente mencionados. Los resultados obtenidos por el programa son comparados con la solución analítica en casos sencillos y para casos más complicados con la solución obtenida mediante el software COMSOL Multiphysics.

1. Introducción.

Los fenómenos físicos pueden ser descritos por medio de ecuaciones diferenciales parciales para los cuales es imposible encontrar soluciones analíticas. Cuando esto sucede es necesario apoyarnos de métodos numéricos como el método del elemento finito (FEM, por sus siglas en inglés),

este método genera sistemas de ecuaciones enormes que se pueden resolver haciendo uso del poder de cálculo computacional. El presente trabajo de investigación se centra en la creación de una librería FEM desarrollada en la plataforma RAD Studio XE (cuyo lenguaje base es C++). Se pretende que el software sea capaz de resolver cualquier sistema diferencial de una dimensión (1D) temporal con derivadas espaciales de orden dos. Se pretende aplicar el software a fenómenos de transferencia de calor y modelos de vigas. Este trabajo forma parte de un proyecto de desarrollo de un software FEM llamado SEDEF y tiene una finalidad principalmente académica, el cual podrá ser descargado de forma gratuita por alumnos y profesores. Los detalles del desarrollo de este trabajo se pueden consultar en [2].

2. Ecuaciones generales.

Para poder modelar gran cantidad de fenómenos físicos es necesario proponer expresiones que puedan representar cualquier sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), con coeficientes tanto dependientes del espacio como del tiempo. Estas ecuaciones serán para el caso de sistemas de EDPs sólo con una dimensión espacial y una espacial. Se propone, $\forall x \in [a, b]$ y $\forall t \in [t_0, \tau]$,

$$\widetilde{K}\ddot{\tilde{u}} + \widetilde{L}\dot{\tilde{u}} + \widetilde{M}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \widetilde{N}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \widetilde{P}\tilde{u} = \tilde{f}. \quad (1)$$

La ecuación 1 no cuenta con términos que representan algunos fenómenos físicos. Por esto, también se propone la ecuación:

$$\widetilde{K}\ddot{\tilde{u}} + \widetilde{L}\dot{\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\widetilde{M}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \widetilde{O}\tilde{u} + \tilde{r} \right) + \widetilde{N}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \widetilde{P}\tilde{u} = \tilde{f}. \quad (2)$$

Para las ecuaciones 1 y 2 $\widetilde{K}, \widetilde{L}, \widetilde{M}, \widetilde{O}, \widetilde{N}$ y \widetilde{P} son matrices de coeficientes del sistema de dimensión $n \times n$, \tilde{f} y \tilde{r} son vectores conocidos de dimensión n , \tilde{u} es el vector de incógnitas de dimensión n y el punto sobre el vector \tilde{u} indica derivada parcial de este respecto al tiempo. La expresión de el vector \tilde{u} es

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{pmatrix} u^0(x, t) \\ \vdots \\ u^{n-1}(x, t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

A continuación se da una interpretación física a los términos:

- \widetilde{K} contiene los coeficientes de masa.
- \widetilde{L} , dependiendo del problema, contiene los coeficientes de masa o amortiguamiento.
- $-\widetilde{M}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \widetilde{O}\tilde{u} + \tilde{r}$ es el flujo conservativo.
- $\widetilde{M}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$, $\widetilde{O}\tilde{u}$ y \tilde{r} , representan la difusión, convección y fuente del flujo respectivamente.
- $\widetilde{N}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ es la convección.

- $\widetilde{P}\widetilde{u}$ modela la absorción.
- \widetilde{f} es el vector fuente.

3. Aplicación del método del elemento finito.

Las ecuaciones diferenciales parciales propuestas en la sección 2 son válidas en un dominio $\Omega_s = [a_s, b_s]$, donde Ω_s es el dominio número s . Para esta porción de línea y su respectiva ecuación se aplica el concepto de método del elemento finito (FEM), en un primer proceso se define el vector de flujo

$$\widetilde{v}_f(x, t) = \begin{cases} \widetilde{M} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} & \text{para la ecuación 1} \\ -\widetilde{M} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \widetilde{O}\widetilde{u} + \widetilde{r} & \text{para la ecuación 2} \end{cases} \quad (1)$$

En este proceso se realiza una integración por partes, la cual da origen a las condiciones de frontera naturales. Sin embargo, es posible que en lugar del flujo se conozca directamente el valor de incógnita en la frontera. Por lo que los valores conocidos en las fronteras $g_{a_s}^i$ y $g_{b_s}^i$ son:

$$\begin{aligned} g_{a_s}^i &= \begin{cases} v_f^i(a_s, t) & \text{si se conoce el valor del vector de flujo} \\ u^i(a_s, t) & \text{si se conoce el valor de la incógnita} \end{cases}, \\ g_{b_s}^i &= \begin{cases} v_f^i(b_s, t) & \text{si se conoce el valor del vector de flujo} \\ u^i(b_s, t) & \text{si se conoce el valor de la incógnita} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

donde v_f^i es la componente i del vector \widetilde{v}_f , u^i es la componente i del vector \widetilde{u} .

Continuando con el proceso, se divide el dominio en secciones, conocidas como elementos. Esto genera un conjunto de puntos o nodos, al cual se le conoce como malla. Se interpola a \widetilde{u} en cada elemento con polinomios de grado $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, esto conduce a la ecuación diferencial ordinaria

$$\widetilde{\sigma}(t)\ddot{\widetilde{U}}(t) + \widetilde{\lambda}(t)\dot{\widetilde{U}}(t) + \widetilde{T}(t)\widetilde{U}(t) = \widetilde{e}(t) \quad (3)$$

donde \widetilde{U} es un vector que contiene el valor de cada una de las incógnitas en cada punto de la malla.

Es posible que el problema cuente con más de un dominio y además tengan zonas de unión, para esto se definen fronteras internas y externas como se muestra en la figura 1. Para asegurar la continuidad en las fronteras internas, se escriben las expresiones:

$$\widetilde{u}_c^0 = \dots = \widetilde{u}_c^s = \dots = \widetilde{u}_c^{n_\Omega} \quad (4)$$

$$\sum_{s=0}^{n_\Omega} \eta \widetilde{v}_{fc}^s = \widetilde{g} \quad (5)$$

donde

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{si la frontera en la unión es } a_s \\ -1 & \text{si la frontera en la unión es } b_s \end{cases}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= 0 \text{ si el flujo es continuo,} \\ \tilde{g} &\neq 0 \text{ si se desea definir una discontinuidad del flujo,} \end{aligned} \quad (7)$$

\tilde{u}_c^s es el vector de incógnitas en el nodo de unión en el dominio s , \tilde{v}_{fc}^s es el vector de flujo en el nodo de unión del dominio s , n_Ω es el número de dominios.

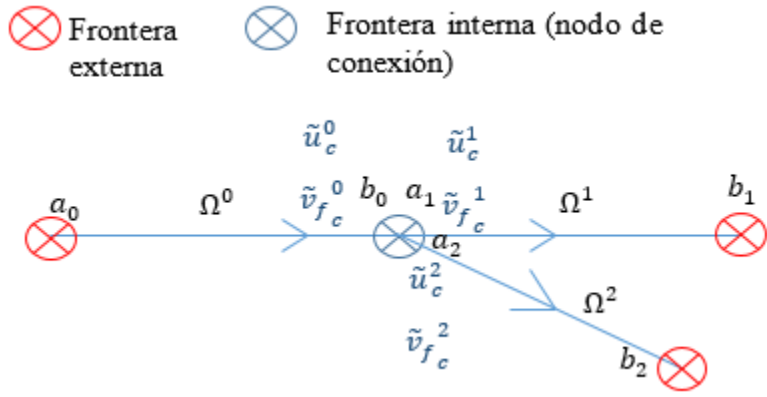


Figura 1: Ejemplo de un problema con tres dominios.

4. Tipos de estudios.

4.1. Estudio estático.

Cuando se realiza un estudio estático se busca la solución independiente del tiempo (estudio estacionario). Por lo que la ecuación 3 se reduce a

$$\tilde{T}\tilde{U} = \tilde{e} \quad (1)$$

el cual es un sistema lineal que se puede resolver mediante una descomposición LU.

4.2. Estudio transitorio.

Estas condiciones son el valor en el primer instante de la incógnita y si hay términos de segunda derivada respecto al tiempo también es necesario el valor de su derivada, así se define

$$\tilde{u}(t_0) = \tilde{v}_0, \dot{\tilde{u}}(t_0) = \dot{\tilde{v}}_0 \quad (2)$$

donde \tilde{v}_0 y $\dot{\tilde{v}}_0$ son los valores iniciales de la incógnita y su derivada respectivamente.

Se discretiza la dimensión temporal y se aplican series de Taylor hasta un orden $o \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a la ecuación 3. Todo este procedimiento resulta en:

- Caso $\tilde{\sigma} \neq 0$:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(t_r) &= h\beta_{k-1}\dot{\tilde{U}}(t_r) - \sum_{i=1}^k a_{i-1}^{k-1}\tilde{U}(t_{r-i}) + \tilde{O}(k+1), \\ \dot{\tilde{U}}(t_r) &= \tilde{U}^{-1} \left[h\beta_{k-1} \left(\tilde{\epsilon}(t_r) + \tilde{T}(t_r) \sum_{i=1}^k a_{i-1}^{k-1}\tilde{U}(t_{r-i}) \right) - \tilde{\sigma}(t_r) \sum_{i=1}^k a_{i-1}^{k-1}\dot{\tilde{U}}(t_{r-i}) \right] + \tilde{O}(k+1), \\ \tilde{U} &= \tilde{\sigma}(t_r) + h\beta_{k-1}\tilde{\lambda}(t_r) + (h\beta_{k-1})^2\tilde{T}(t_r)\end{aligned}\quad (3)$$

- Caso $\tilde{\sigma} = 0$:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(t_r) &= \tilde{U}^{-1} \left[h\beta_{k-1}\tilde{\epsilon}(t_r) - \tilde{\lambda}(t_r) \sum_{i=1}^k a_{i-1}^{k-1}\tilde{U}(t_{r-i}) \right] + \tilde{O}(k+1), \\ \tilde{U} &= \tilde{\lambda}(t_r) + h\beta_{k-1}\tilde{T}(t_r).\end{aligned}\quad (4)$$

5. Adaptaciones a fenómenos físicos.

5.1. Transferencia de calor.

La ecuación de transferencia de calor unidimensional ésta dada por

$$\rho(x,t)c_p(x,t)\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\kappa(x,t)\frac{\partial}{\partial x}T(x,t) \right) = Q(x,t). \quad (1)$$

Por lo tanto, el vector de incógnitas de las ecuaciones generales 1 y 2 \tilde{u} tiene una sola componente como se muestra a continuación:

$$\tilde{u} = (u^0) = (T(x,t)). \quad (2)$$

Al definir sólo una incógnita la ecuación 2 se reduce a

$$K_{00}\ddot{u}^0 + L_{00}\dot{u}^0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(-M_{00}\frac{\partial}{\partial x}u^0 - Ou^0 + r \right) + N_{00}\frac{\partial}{\partial x}u^0 + P_{00}u = f_0. \quad (3)$$

Analizando los coeficientes de la ecuación 1 y comparando con 3, se tiene:

$$L_{00} = \rho(x,t)c_p(x,t) \quad M_{00} = \kappa(x,t), \quad f_0 = Q(x,t). \quad (4)$$

Debido a esto, el vector de flujo tiene una sola componente la cual tiene por expresión

$$v_f^0 = -\kappa(x,t)\frac{\partial}{\partial x}T(x,t). \quad (5)$$

ésto es el flujo de calor. Las condiciones de frontera pueden ser sobre el flujo de calor (ecuación 5) o el valor de la temperatura (ecuación 2).

5.2. Vigas en el plano.

Para vigas en el plano las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial N}{\partial x} &= f_x, \\ \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= f_y, \\ I_{zz} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial M_z}{\partial x} - Q &= m, \end{aligned} \quad (6)$$

mientras que el comportamiento mecánico esta definido por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} - \theta &= 0, \\ M_z - EI_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= M_z^0 - EI_{zz} \frac{\partial \theta_0}{\partial x}, \\ N - EA \frac{\partial u}{\partial x} &= N_0 - EA \varepsilon_0^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Entonces el vector de incógnitas de la ecuación 2 es

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ Q \\ M_z \\ N \end{pmatrix}, \quad (8)$$

para esto las matrices de coeficientes y el vector de funciones conocidas tienen las siguientes formas:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \begin{pmatrix} \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ -EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{P} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ m \\ 0 \\ M_z^0 - EI_{zz} \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \\ N_0 - EA \varepsilon_0^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Sin embargo, estas ecuaciones son válidas en sistema de coordenadas locales. Para definir un sistema en común para todos los dominios, llamado sistema global (véase figura 1), se implementa la

matriz de rotación

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta_e & \sin \theta_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_e & \cos \theta_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Al definir la matriz de rotación \tilde{R} el vector \tilde{u} ahora es

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \theta \\ Q \\ M_z \\ N \end{pmatrix} = \tilde{R} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ Q \\ M_z \\ N \end{pmatrix} \quad (11)$$

y el vector de flujo

$$\tilde{v}_f = \begin{pmatrix} Q \sin \theta_e - N \cos \theta_e \\ -N \sin \theta_e - Q \cos \theta_e \\ -M_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Por lo tanto, según la ecuación 4, la ecuación en los nodos (los cuales son fronteras internas) resulta en

$$\sum \tilde{F}_i + \tilde{F}_e = 0 \quad (13)$$

donde \tilde{F}_i es el vector de fuerzas internas aplicadas en el nodo y \tilde{F}_e es el vector de fuerzas externas aplicadas en el nodo.

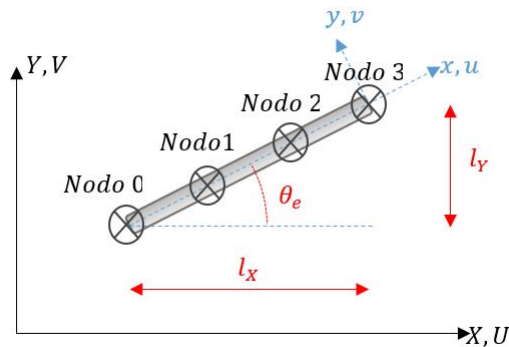


Figura 1: Elemento viga en el plano.

6. Validación y aplicaciones.

6.1. Validación 1: estudio estático con dos variables y dos dominios.

El problema consiste de los dominios $\Omega_0 = [0,5]$ y $\Omega_1 = [5,7.3]$ con dos funciones incógnita u_0 y u_1 . El sistema de ecuaciones, en forma de de la ecuación genérica 2, es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[- \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -x & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du_0}{dx} \\ \frac{du_1}{dx} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du_0}{dx} \\ \frac{du_1}{dx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x(90x - 15x^2 - 90) \end{pmatrix} \forall x \in \Omega_0, \\ \frac{d}{dx} \left[- \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du_0}{dx} \\ \frac{du_1}{dx} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du_0}{dx} \\ \frac{du_1}{dx} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 100 \\ 100 - 45x^2 \end{pmatrix} \forall x \in \Omega_1. \end{aligned} \quad (1)$$

cuya solución analítica, con condiciones de frontera $u_0(0) = 0$ y $u_1(0) = u_1(5) = 1$, es:

$$\begin{aligned} u_0 &= 15x^3 \forall x \in \Omega_0, \Omega_1, \\ u_1 &= 90x - 15x^3 + \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \left[1426 \csc\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) - \cot\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \right] \forall x \in \Omega_0, \\ u_1 &= 100x - 30x^3 + 3251 \forall x \in \Omega_1. \end{aligned} \quad (2)$$

En la figura 2 se muestra la comparación entre la solución analítica y la solución numérica obtenida por lo programado. Se aprecia que se obtienen los mismos resultados.

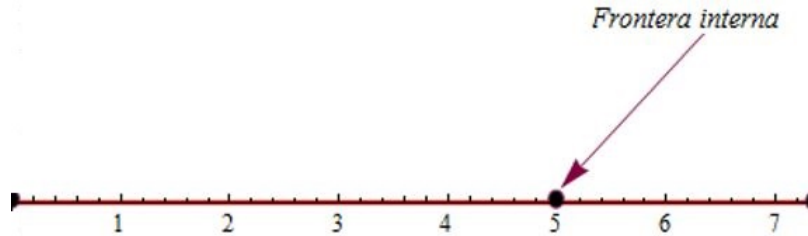


Figura 1: Dominios para el estudio 6.1.

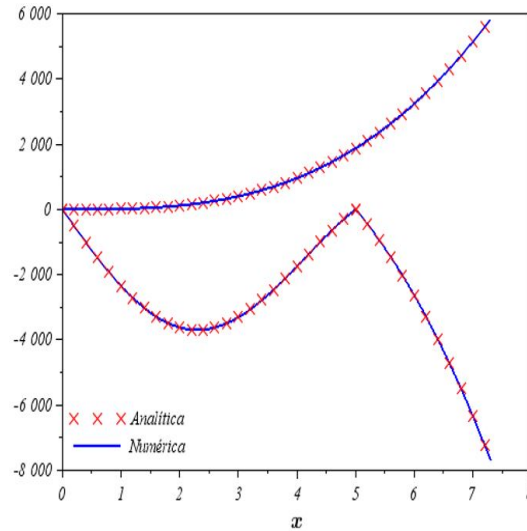


Figura 2: Solución analítica vs solución numérica del estudio 6.1.

6.2. Validación con aplicación 1: estudio de transferencia de calor dependiente del tiempo.

Para esta prueba se desea predecir la distribución de temperatura $\forall t \in [0, 1]s$, de la barra en la figura 3, de longitud $l = 2m$ ($\Omega = [-1, 1]m$) con las siguientes propiedades: $\kappa = 1 W/(m \cdot K)$, $\rho = 1 kg/m^3$ y $c_p = 1 J/(kg \cdot K)$.

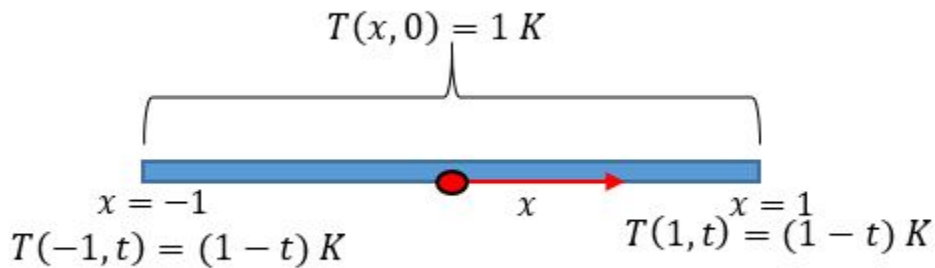


Figura 3: Barra a una temperatura de 1 K.

Inicialmente la distribución de temperatura es constante a lo largo de toda la barra, e igual a $1K$ ($T(x, 0) = 1K$). En los bordes de la placa la temperatura varía linealmente respecto al tiempo de la siguiente manera:

$$T(-1, t) = T(1, t) = 1 - t \quad (3)$$

Para validar los resultados obtenidos se compararan contra los resultados del software COMSOL. Los resultados obtenidos por ambos software se observan en la figura 4. Comparando gráficamente, el resultado obtenido mediante ambos programas es prácticamente igual, implica que la adaptación

a la transferencia de calor funciona correctamente; se confirma la adaptabilidad de las ecuaciones genéricas.

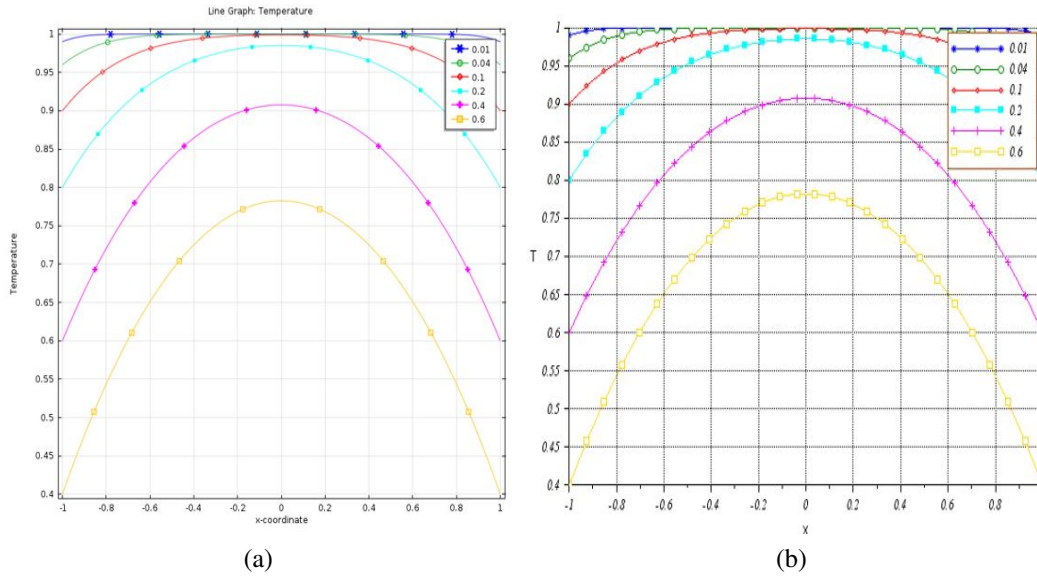


Figura 4: Resultados obtenidos por COMSOL (a) y el programa (b).

6.3. Validación y aplicación 2: Conjunto de vigas en el plano.

Se desea predecir los desplazamientos en la estructura o puente que se muestra en la figura 1a, construido de acero estructural. El puente está sometido a las cargas mostradas la tabla 1a , además del peso propio de la estructura, que está dado por:

$$W_i = 9,81A_i\rho \quad (4)$$

donde W_i es el peso propio del dominio i , A_i es el área transversal del dominio i y ρ es la densidad, el cual tiene un valor de $7850\text{kg}/\text{m}^3$. Los dominios 13 a 22 tienen una densidad de carga en dirección de Y de $-24,721.2\text{ N/m}$ y carga debido a la variación de la temperatura con un $\Delta T = 30\text{ K}$, esta carga está dada por:

$$W_T = EA\alpha\Delta T \quad (5)$$

donde A es el área de la sección transversal de cualquier dominio del 13 al 22 (ya que comparten la misma sección transversal), $\alpha = 12,3 \cdot 10^{-6}\text{K}^{-1}$ es el coeficiente de dilatación térmica y $E = 200 \times 10^9\text{ Pa}$ es el módulo de Young. Sólo existen dos tipos secciones transversales diferentes, tipo 1 y tipo 2. La nomenclatura de sus dimensiones se muestra en la figura 6. Las restricciones en desplazamientos se muestran en el tabla 1b.

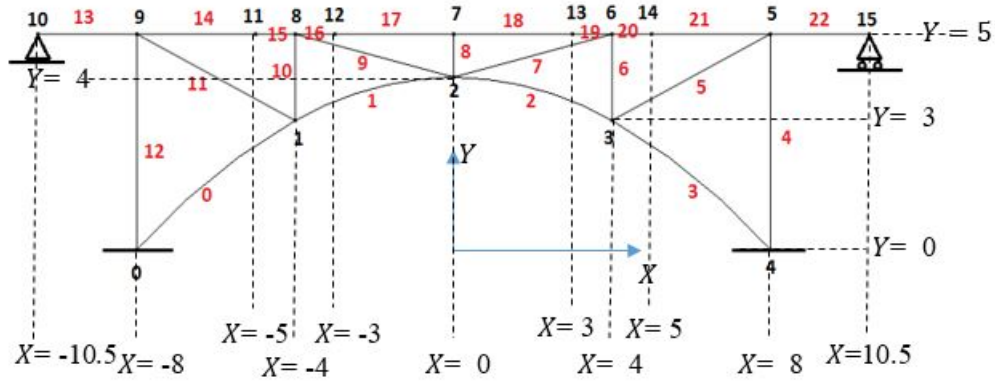


Figura 5: Geometría considerado del puente; números negros hacen referencia al nodo, números rojos al dominio

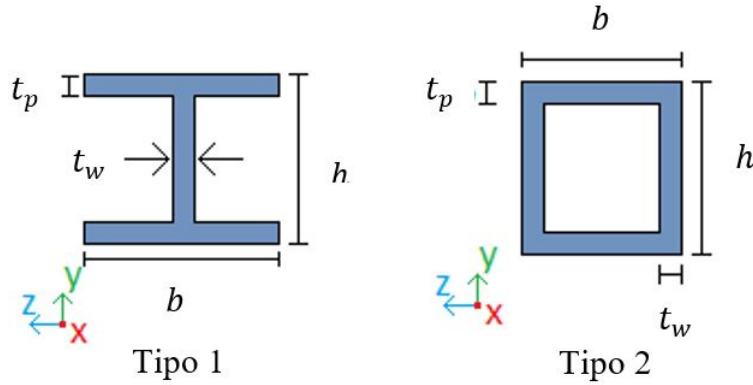


Figura 6: Secciones transversales consideradas.

Nodo	$F_x(N)$	$F_y(N)$
11	3000	3000
12	3000	3000
13	-3000	3000
14	-3000	3000

(a)

Nodo	u	v	θ
0	X		X
4	X	X	X
10	X	X	
15		X	

(b)

Tabla 1: Fuerzas nodales (a). Restricciones en los desplazamientos (b).

La sección transversal del arco varia conforme su longitud. La longitud de arco esta dada por

$$L(X) = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} X \sqrt{64X^2 + X^2} + 32 \ln \left(\frac{X}{8} + \sqrt{\frac{X^2}{64} + 1} \right) \right] + 4 \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]. \quad (6)$$

La altura de la sección transversal del arco varia linealmente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} h_1(X) &= 0,6 - \frac{0,3L(X)}{L(0)} \forall X \in [-8, 0], \\ h_2(X) &= 0,3 \left(1 + \frac{L(X) - L(0)}{L(8) - L(0)} \right) \forall X \in [0, 8]. \end{aligned} \quad (7)$$

En la tabla 2 de muestra el tipo y las dimensiones de la sección transversal de cada dominio.

Dominio(s)	Tipo de sección	h (m)	b (m)	t_w (m)	t_p (m)
0,1	1	h_1	0.4	0.025	0.025
2,3	1	h_2	0.4	0.025	0.025
4-12	2	0.25	0.25	0.025	0.025
13-22	1	0.4	0.2	0.0125	0.0125

Tabla 2: Dimensiones de la sección transversal de cada dominio.

En la figura 7 se muestra la geometría deformada tanto por COMSOL como por el programa propuesto. Así como también se hace una comparación numérica de los resultados en la tabla 3; donde u es el desplazamiento en dirección de X, v es el desplazamiento en dirección de Y, y θ es la rotación.

Nodo	u (m)		v (m)		θ	
	Programa	COMSOL	Programa	COMSOL	Programa	COMSOL
0	0	0	0	0	0	0
1	0.000519	0.000518	-0.000674	-0.000675	-0.000287	-0.000291
2	0.000877	0.000874	-0.000562	-0.000558	0.000408	0.000404
3	0.001089	0.001082	0.000973	0.000975	-0.000039	-0.000047
4	0	0	0	0	0	0
5	0.001943	0.001938	-0.000206	-0.000206	-0.000213	-0.000212
6	0.000922	0.00092	0.000874	0.000875	0.000164	0.000162
7	0.000764	0.000762	-0.000583	-0.000579	0.000085	0.000086
8	0.000732	0.00073	-0.000733	-0.000733	-0.000059	-0.000057
9	0.000461	0.000461	-0.000233	-0.000233	-0.000191	-0.00019
10	0	0	0	0	-0.000215	-0.000215
11	0.000666	0.000664	-0.000845	-0.000846	0.000162	0.000164
12	0.000741	0.000739	-0.000946	-0.000945	-0.000249	-0.000248
13	0.000882	0.000879	0.000382	0.000384	0.000667	0.000666
14	0.001176	0.001174	0.000649	0.00065	-0.00046	-0.000461
15	0.002865	0.002861	0	0	0.0004	0.0004

Tabla 3: Comparación numérica de los resultados.

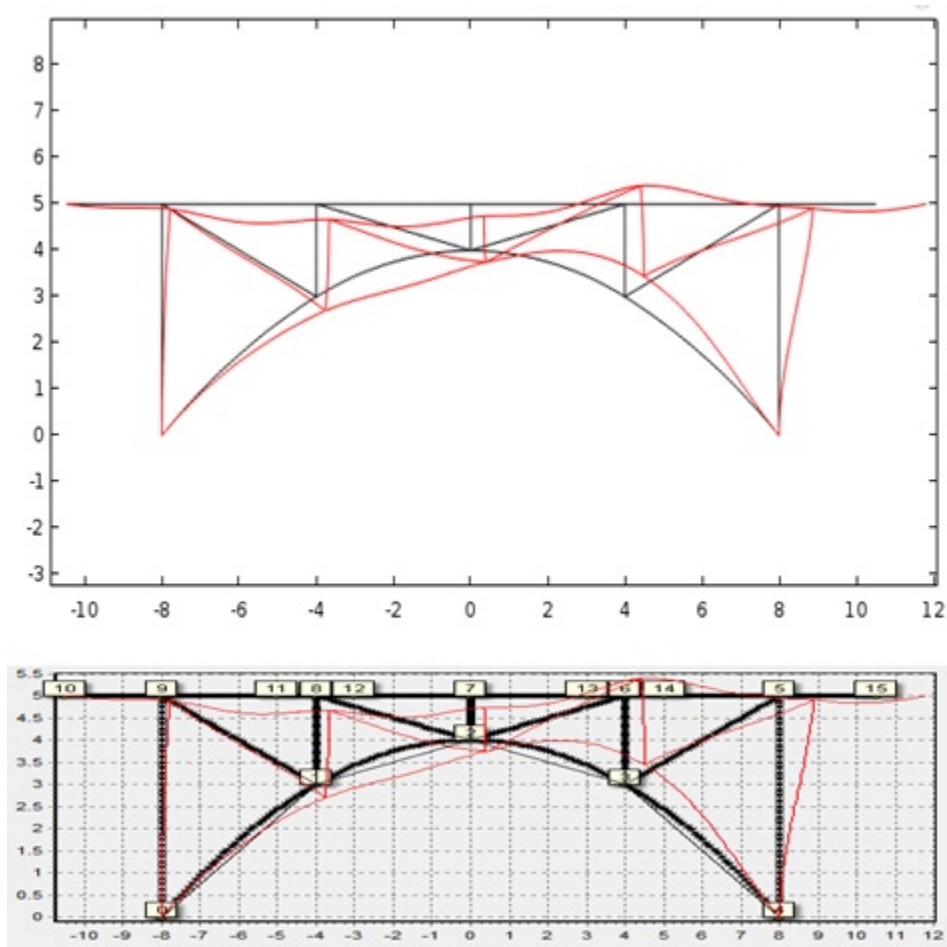


Figura 7: Comparación de la geometría deformada entre COMSOL (arriba) y el programa (abajo).

7. Conclusiones.

Basándose en las pruebas y diferentes tipos de estudios realizados, el programa obtiene buenas aproximaciones numéricas. También resuelve los problemas de manera rápida y utilizando pocos recursos de memoria de la computadora. Con lo anterior mencionado se puede decir que el programa es eficiente y eficaz. La eficiencia conseguida se debe principalmente a la implementación de la librería CSparse.

El algoritmo que resuelve los problemas dependientes del tiempo también obtuvo buenas aproximaciones con eficiencia. Al resolver problemas dependientes del tiempo con un orden de la FDR mayor a dos se presentó inestabilidad. Se propone, en un futuro, hacer una modificación al programa para implementar tolerancias en los métodos y tratar de eliminar la inestabilidad.

Para la adaptación a los diferentes modelos matemáticos, como lo son la transferencia de calor y vigas, se obtuvieron buenos resultados y un buen comportamiento del programa. Esto sirve como comprobación de que las ecuaciones generales pueden ser adaptadas a gran cantidad de fenómenos físicos.

En un futuro el programa puede ser aplicado a más fenómenos físicos, entre uno de ellos se encuentra el de vigas en el espacio. También se desarrollara un algoritmo capaz de obtener los

valores y vectores propios de las matrices dispersas. Todo esto será implementado en el software gratuito SEDEF.

Referencias

- [1] Timothy A. Davis. *Direct methods for sparse linear systems*. SIAM, Philadelphia, 2006.
- [2] Axel F. Domínguez A. Resolvedor de sistemas de ecuaciones diferenciales unidimensionales por el método del elemento finito, 2015.