

El Tecnológico de Monterrey Campus Chihuahua y el "Decision Sciences Institute" otorgan el presente diploma a:

DR ALBERTO DÍAZ DÍAZ

Por haber participado en el Noveno Congreso Internacional de Investigación Científica Multidisciplinaria como expositor de la ponencia:

MODELO PARA CASCARONES MEDIANTE UNA APROXIMACIÓN DE ESFUERZOS.

Autores participantes en el congreso:

AXEL FERNANDO DOMÍNGUEZ ALVARADO, ALBERTO DÍAZ DÍAZ

Chihuahua, Chih. a 17 de noviembre del 2017



M.C.P. Elias Solis Rivera
Director de Investigación,
Inovación y Desarrollo Tecnológico



M.A. Maria Cristina Torres Espinosa
Coordinadora del Congreso ICM

Modelo para cascarones mediante una aproximación de esfuerzos.

Axel Fernando Domínguez Alvarado.

Centro de investigación en materiales avanzados.

ing.axl89@gmail.com

Alberto Díaz Díaz.

Centro de investigación en materiales avanzados.

alberto.diaz@cimav.edu.mx

Temática general: Ingeniería y desarrollo.

Resumen

Los elementos estructurales tipo cascarón están presentes en gran parte de la industria, como: construcción, aeronáutica, automotriz, aeroespacial, etc. Es verdad que este tipo de elementos pueden ser modelados por sólidos 3D, pero recurrir a esta técnica suele llevar cálculos “pesados” para llegar a una solución. Por esto, es necesario desarrollar herramientas que nos permitan predecir el comportamiento de los cascarones con buena precisión y que reduzcan el “costo” de cálculo. En este trabajo se presenta un modelo matemático 2D para cascarones moderadamente gruesos partiendo de una aproximación de los esfuerzos 3D. Primero se revisan algunos conceptos teóricos sobre los cascarones, para después exponer las ecuaciones del modelo mencionado. Para finalizar, se resuelven diferentes problemas por diferentes métodos y teorías, incluyendo la desarrollada en este artículo, y así comparar los resultados obtenidos.

Palabras clave: cascarones, esfuerzos, aproximación.

Abstract

The structural shell-like elements are present in much of the industry, such as: construction, aeronautics, automotive, aerospace, etc. It is true that these types of elements can be modeled by 3D solids, but using this technique often carries "heavy" calculations to get the solution. For this reason, it is necessary to develop tools that allow us to predict the behavior of shells with good precision and reduce the "cost" of calculation. In this work we present a 2D mathematical model for moderately coarse shells starting from an approximation of 3D efforts. First, some theoretical

concepts about shells are reviewed, and then the equations of the model are shown. Finally, different problems are solved by some methods and theories, including the one developed in this article, in order to compare the results obtained.

Key words: shells, stress, approach.

1. Introducción.

Los elementos tipo cascarón son frecuentemente utilizados en la ingeniería de estructuras, para predecir su comportamiento se han desarrollado varios modelos matemáticos que reducen el problema de 3D a 2D. Los cascarones se pueden clasificar como delgados o moderadamente gruesos dependiendo de la relación entre el espesor h y el menor de los radios de curvatura principales, R_1 o R_2 . Las teorías más simples para cascarones delgados son desarrolladas partiendo de una aproximación de los desplazamientos similar a la aproximación de Kirchhoff-Love para placas, además omiten el efecto de la deformación cortante transversal (Love, 1888), (Sanders Jr, 1959). Existen teorías para cascarones moderadamente gruesos en las que se utiliza una aproximación de desplazamientos análoga la teoría de placas de Mindlin, pero desprecian el esfuerzo normal y las deformaciones lineales fuera del plano (Naghdi, 1973), (Reddy, 2006). La principal falla de los modelos para cascarones, delgados o moderadamente gruesos, es que el campo de esfuerzos no cumple con la ecuación de equilibrio ni las condiciones de frontera 3D.

En este artículo se presenta un modelo matemático llamado SAM-H para cascarones moderadamente gruesos. El modelo presenta las siguientes mejoras respecto a las teorías utilizadas actualmente:

1. La precisión de la aproximación de los esfuerzos; la cual verifica la ecuación de equilibrio y las condiciones de frontera 3D.
2. Se toma en cuenta y se distingue el efecto del vector de esfuerzos aplicado en las caras interior y exterior.
3. A diferencia de todas las demás teorías, el efecto Poisson del esfuerzo normal fuera del plano sobre las deformaciones en el plano no es despreciado.

Para que el lector pueda comprender más sobre el modelo y sus aplicaciones se repasarán algunos conceptos teóricos de los cascarones; a que se le puede considerar cascarón, sus aspectos geométricos, terminología. Después se muestran las ecuaciones del presente modelo, como lo son: ecuaciones de equilibrio, comportamiento, etc. Para validar las ecuaciones del modelo, se plantea un problema simple con el fin de obtener las soluciones analíticas del presente modelo, el modelo clásico y las ecuaciones 3D; y así después comparar los resultados obtenidos. Por último, se analizan resultados numéricos de las ecuaciones obtenidos mediante el software COMSOL Multiphysics.

2. Aspectos teóricos de los cascarones.

Los cascarones tienen todas las características de los elementos tipo placa y una adicional; las curvaturas. En (Ventsel & Krauthammer, 2001) definen a los cascarones a aquellos cuerpos delimitados por dos superficies curvas, y al lugar geométrico de puntos isodistantes a las dos superficies curvas se le conoce como superficie media del cascarón ω . El espesor es la distancia perpendicular entre las dos superficies curvas. Así, la geometría de un cascarón es definida por estos dos parámetros, especificando en cada punto la forma de la superficie media y el espesor.

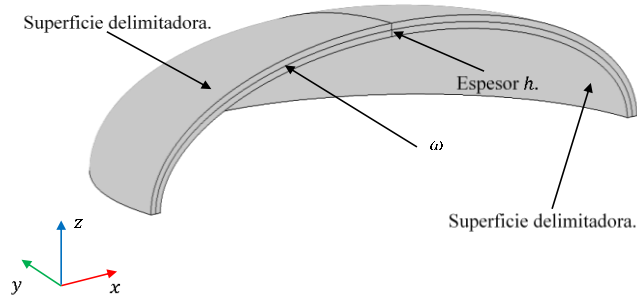


Figura 1

2.1. Geometría del cascarón.

Se puede definir la geometría del cascarón en función de las coordenadas curvilíneas ξ_1, ξ_2 y ξ_3 . ξ_3 es la coordenada en dirección del espesor h , mientras que ξ_1 y ξ_2 son tangenciales a la superficie media ($\xi_3 = 0$). Las superficies exterior e interior del cascarón corresponden a aquellos puntos en que $\xi_3 = \frac{h}{2}$ y $\xi_3 = -\frac{h}{2}$ respectivamente. Para las coordenadas curvilíneas ξ_1 y ξ_2 corresponden los radios de curvatura principales R_1 y R_2 ; entonces las curvaturas principales son $\kappa_1 = \frac{1}{R_1}$ y $\kappa_2 = \frac{1}{R_2}$. El cascarón es de doble curvatura si $R_1 \neq 0$ y $R_2 \neq 0$, en caso de que alguno de los radios sea igual a cero entonces el cascarón es de curvatura sencilla.

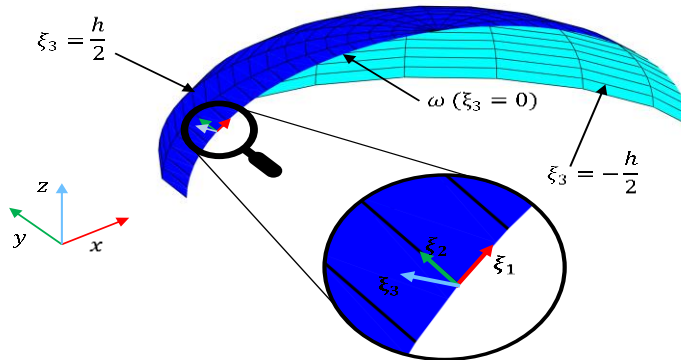


Figura 2

3. Modelo SAM-H.

Este nuevo modelo, llamado SAM-H (Stress Approach Model of Homogeneous shells), se construye a partir de una aproximación de esfuerzos, la cual se escribe en función de polinomios de la coordenada de espesor del cascaron. La aproximación de esfuerzos $\forall \alpha, \beta \in \{1,2\}$ es la siguiente: **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

$$\sigma_{\alpha\beta}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{n=0}^1 \sigma_{\alpha\beta}^{n*}(\xi_1, \xi_2) P_n(\xi_3) \quad (1)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{n=0}^3 \sigma_{\alpha 3}^{n*}(\xi_1, \xi_2) P_n(\xi_3) \quad (2)$$

$$\sigma_{33}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{n=0}^4 \sigma_{33}^{n*}(\xi_1, \xi_2) P_n(\xi_3) \quad (3)$$

donde los coeficientes $\sigma_{ij}^{n*} \forall i, j \in \{1,2,3\}$ se escriben en términos de las fuerzas generalizadas y los polinomios son:

$$\begin{aligned} P_0(\xi_3) &= 1, & P_1(\xi_3) &= \frac{\xi_3}{h}, & P_2(\xi_3) &= -6\left(\frac{\xi_3}{h}\right)^2 + \frac{1}{2}, \\ P_3(\xi_3) &= -2\left(\frac{\xi_3}{h}\right)^2 + \frac{3}{10}\left(\frac{\xi_3}{h}\right), \\ P_4(\xi_3) &= -\frac{14}{3}\left(\frac{\xi_3}{h}\right)^4 + \left(\frac{\xi_3}{h}\right)^2 - \frac{1}{40} \quad y \\ P_5(\xi_3) &= \left(\frac{\xi_3}{h}\right)^5 - \frac{5}{18}\left(\frac{\xi_3}{h}\right)^3 + \frac{5}{336}\left(\frac{\xi_3}{h}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

los cuales son ortogonales entre ellos. Para ver más detalles sobre la aproximación de esfuerzos véase los Anexos.

Se definen las componentes de las fuerzas generalizadas de membrana $\tilde{\mathbf{N}}^*$, de cortante $\tilde{\mathbf{Q}}^*$ y momentos $\tilde{\mathbf{M}}^*$ como sigue:

$$N_{\alpha\beta}^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta}^* \left(1 + \frac{\xi_3}{R_{3-\beta}}\right) d\xi_3 \quad (5)$$

$$Q_\alpha^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3}^* \left(1 + \frac{\xi_3}{R_{3-\alpha}}\right) d\xi_3 \quad (6)$$

$$M_{\alpha\beta}^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \xi_3 \sigma_{\alpha\beta}^* \left(1 + \frac{\xi_3}{R_{3-\beta}}\right) d\xi_3. \quad (7)$$

Hay que señalar que $\tilde{\mathbf{N}}^*$ y $\tilde{\mathbf{M}}^*$ serán no simétricos si $R_1 \neq R_2$, mientras que el tensor de esfuerzos siempre es simétrico. Cabe destacar que con la aproximación de esfuerzos escogida las condiciones de frontera 3D en las superficies del cascarón verifican $\forall (\xi_1, \xi_2) \in \omega$:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha^+(\xi_1, \xi_2) &= \sigma_{\alpha 3} \left(\xi_1, \xi_2, \frac{h}{2}\right), & \tau_\alpha^-(\xi_1, \xi_2) &= -\sigma_{\alpha 3} \left(\xi_1, \xi_2, -\frac{h}{2}\right), \\ \sigma^+(\xi_1, \xi_2) &= \sigma_{33} \left(\xi_1, \xi_2, \frac{h}{2}\right) & \text{y} & \quad \sigma^-(\xi_1, \xi_2) = \sigma_{33} \left(\xi_1, \xi_2, -\frac{h}{2}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

donde τ_α^+ y τ_α^- son los cortantes aplicados en las direcciones tangenciales en las superficies exterior e interior respectivamente; σ^+ es el esfuerzo en dirección del espesor en la superficie exterior y σ^- corresponde al esfuerzo en dirección del espesor en la superficie interior.

El modelo cuenta con las ecuaciones de equilibrio mostradas a continuación:

$$\widetilde{\text{div}} \tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}} + \frac{h}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^+ - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^-) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^+ - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^- + h \tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{0}}, \quad (9)$$

$$\widetilde{\text{div}} \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{Q}} + \frac{h^2}{4} (\kappa_1 + \kappa_2) (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^+ + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^-) + \frac{h}{2} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^+ - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^-) + \frac{h^3 (\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{0}}, \quad (10)$$

$$\text{div} \tilde{\mathbf{Q}} + \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} h (\kappa_1 + \kappa_2) + \sigma^+ + \sigma^- - N_{11} \kappa_1 - N_{22} \kappa_2 + h f_3 = \tilde{\mathbf{0}}, \quad (11)$$

ya que se trabaja en coordenadas curvilíneas los operadores $\widetilde{\text{div}}$ y div , para cualquier campo, se aplican de la siguiente manera:

$$\widetilde{\text{div}} \tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{a_1 a_2} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial \xi_2} + F_{21} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} - F_{22} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial F_{21}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F_{22}}{\partial \xi_2} + F_{12} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} - F_{11} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\text{div} \tilde{\mathbf{g}} = \frac{1}{a_1 a_2} \left(\frac{\partial a_2 g_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_1 g_2}{\partial \xi_2} \right). \quad (13)$$

Además,

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}^+ = \begin{pmatrix} \tau_1^+ \\ \tau_1^+ \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}^- = \begin{pmatrix} \tau_1^- \\ \tau_1^- \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

f_1 , f_2 y f_3 son las fuerzas volumétricas aplicadas en dirección ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 respectivamente.

Con lo mencionado anteriormente, las condiciones de frontera sobre las fuerzas generalizadas resultan en:

$$\tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}^0 = \tilde{\boldsymbol{F}}^g, \quad \tilde{\boldsymbol{Q}} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}^0 = F_3^g, \quad \tilde{\boldsymbol{M}} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}^0 = \tilde{\boldsymbol{C}}^g. \quad (15)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{n}}^0$ es el vector normal exterior del borde en la superficie media; $\tilde{\boldsymbol{F}}^g$, F_3^g y $\tilde{\boldsymbol{C}}^g$ son los vectores dados de fuerza de membrana, fuerzas cortantes y momentos en los bordes del cascarón, en ese orden. Sus componentes son:

$$\begin{aligned} F_\alpha^g &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{P_0 + h[(n_1^0)^2 \kappa_1 + (n_2^0)^2 \kappa_2] P_1\} s_\alpha^g d\xi_3, \\ F_3^g &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{P_0 + h[(n_1^0)^2 \kappa_1 + (n_2^0)^2 \kappa_2] P_1\} s_3^g d\xi_3, \\ C_\alpha^g &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{h^2}{12} [(n_1^0)^2 \kappa_1 + (n_2^0)^2 \kappa_2] P_0 s_\alpha^g d\xi_3 \\ &\quad + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[1 - \frac{h}{6} (n_1^0)^2 \kappa_1 + (n_2^0)^2 \kappa_2 \right] h P_1 s_\alpha^g d\xi_3. \end{aligned} \quad (16)$$

Las deformaciones generalizadas están dadas por

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \widetilde{\boldsymbol{grad}} \tilde{\boldsymbol{U}}^* + U_3^* \tilde{\boldsymbol{\kappa}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\chi}}^* = \widetilde{\boldsymbol{grad}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^* \quad \text{y} \quad \tilde{\boldsymbol{d}}^* = \widetilde{\boldsymbol{grad}} U_3^* + \tilde{\boldsymbol{\phi}}^* \quad (17)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{U}}^*$ y U_3^* son los desplazamientos generalizados; las componentes del vector $\tilde{\boldsymbol{\phi}}^*$ son las rotaciones generalizadas. Los desplazamientos y rotaciones generalizadas del modelo son determinados por

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}^* &= \begin{pmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{pmatrix}, & U_1^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{P_0}{h} u_1^* d\xi_3, & U_2^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{P_0}{h} u_2^* d\xi_3, \\
\tilde{\Phi}^* &= \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix}, & \phi_1^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{12P_1}{h^2} u_1^* d\xi_3, & \phi_2^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{12P_1}{h^2} u_2^* d\xi_3. \\
U_3^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{P_0}{h} u_3^* d\xi_3.
\end{aligned} \tag{18}$$

u_1^* , u_2^* y u_3^* son las componentes del campo de desplazamientos 3D. Los operadores $\widetilde{\mathbf{grad}}$ y \mathbf{grad} se aplican como se especifica a continuación:

$$\widetilde{\mathbf{grad}} \tilde{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} + \frac{g_2}{a_1 a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} & \frac{1}{a_2} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} - \frac{g_2}{a_1 a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{1}{a_1} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} - \frac{g_1}{a_1 a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} & \frac{1}{a_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_2} + \frac{g_1}{a_1 a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\mathbf{grad} p = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \\ \frac{1}{a_2} \frac{\partial p}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Para escribir las ecuaciones que ligan las fuerzas generalizadas con las deformaciones generalizadas se definen los siguientes vectores:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \hat{N} \\ \hat{M} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \hat{\boldsymbol{\chi}} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

donde

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ N_{21} \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ M_{21} \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \hat{\boldsymbol{\chi}} = \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \\ \chi_{21} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Entonces las ecuaciones constitutivas pueden ser escritas de la siguiente forma vectorial:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{C}\mathbf{q} + \sigma^+ \mathbf{c}^+ + \sigma^- \mathbf{c}^- + f_3 \mathbf{c}^3, \\
\tilde{\mathbf{d}} &= \mathbf{D}\tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{D}^+ \tilde{\boldsymbol{\tau}}^+ + \mathbf{D}^- \tilde{\boldsymbol{\tau}}^-.
\end{aligned} \tag{23}$$

En Anexos. se muestra con detalle la forma de los vectores \mathbf{c}^+ , \mathbf{c}^- y \mathbf{c}^3 y las matrices \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{D}^+ y \mathbf{D}^- .

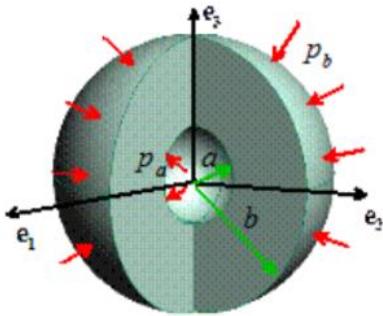
4. Resultados.

4.1. Analíticos.

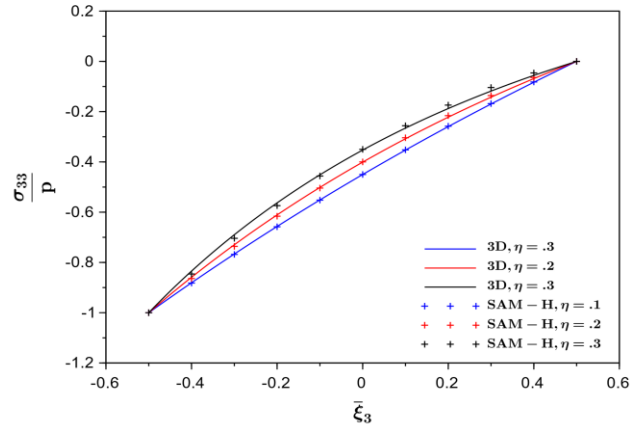
Antes de hacer la programación en COMSOL es necesario validar las ecuaciones. Para esto, se propone un problema sencillo encontrar la solución analítica y compararla contra la solución analítica 3D. El problema considerado es el propuesto por (Bower, 2012), una esfera hueca presurizada (véase Figura 3; **Error! No se encuentra el origen de la referencia..a**). Se asumió que la presión externa $P_b = 0$ y solo actúa la presión interna $P_a = p$, las soluciones analíticas del esfuerzo σ_{33} de las ecuaciones 3D y del modelo desarrollado son:

$$\sigma_{33}^{3D} = p \frac{\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^3}{\left(1 + \frac{\eta}{2}\right)^3 - \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^3} \left(1 - \left(\frac{1 + \frac{\eta}{2}}{1 + \eta \bar{\xi}_3}\right)^3\right), \quad (24)$$

$$\sigma_{33}^{SAM-H} = p \left(\bar{\xi}_3 - 2\bar{\xi}_3^2 - \frac{1 - \eta}{2}\right). \quad (25)$$



(a)



(b)

Figura 3.(a) Esfera presurizada; (b) Resultados analíticos 3D y SAM-H del esfuerzo σ_{33} normalizado respecto a p .

donde $\eta = \frac{h}{R}$ la relación espesor- radio de la superficie media de la esfera; $\bar{\xi}_3 = \frac{\xi_3}{h} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ es la coordenada de espesor normalizada. Mientras que para el *desplazamiento promedio* en dirección normal son:

$$U_3^{3D} = \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_3(\bar{\xi}_3) d\xi_3 = \frac{pR}{E} \left[\frac{2 \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^3 (1 - 2\nu) + \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{\eta}{2}\right)^2 (1 + \nu)}{2 \left[\left(1 + \frac{\eta}{2}\right)^3 - \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^3 \right]} \right], \quad (26)$$

$$U_3^{SAM-H} = \frac{pR}{E} \left[\frac{1 - \nu}{2\eta} - \left(\frac{1 - 2\nu}{2} - \frac{3}{140}\eta - \frac{13\nu}{30}\eta - \frac{\nu}{10}\eta^2 \right) \right]$$

donde $u_3(\bar{\xi}_3)$ es la solución analítica del desplazamiento en dirección normal 3D. Las expresiones en (26) solo dependen de η y el módulo de Poisson ν , entonces se define al error relativo Er como:

$$Er = \frac{U_3^{SAM-H} - U_3^{3D}}{U_3^{3D}}. \quad (27)$$

que también solo depende de η y ν . Ahora se calcula el error relativo para diferentes valores de estos dos parámetros, los cuales se pueden observar en .

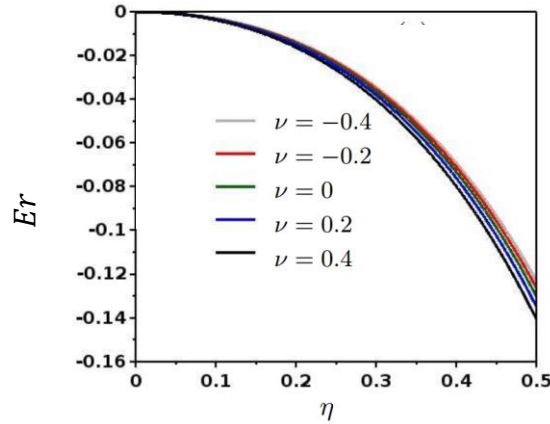


Figura 4. Error relativo del desplazamiento promedio en dirección normal vs relación espesor-radio.

4.2. Numéricos.

Para poder resolver problemas más complejos las ecuaciones del modelo fueron implementadas en el software COMSOL Multiphysics; agradecemos al CIMAV por el permitirnos hacer de su licencia del software.

Esfera sometida a peso propio.

El mismo problema de la esfera hueca pero esta vez sometida a su propio peso es analizado, es decir, que su comportamiento solo depende de fuerzas volumétricas. Los resultados obtenidos de desplazamientos totales y esfuerzo de von Mises para una simulación con relación $\eta = 0.5$ son mostrados en la Figura 5.

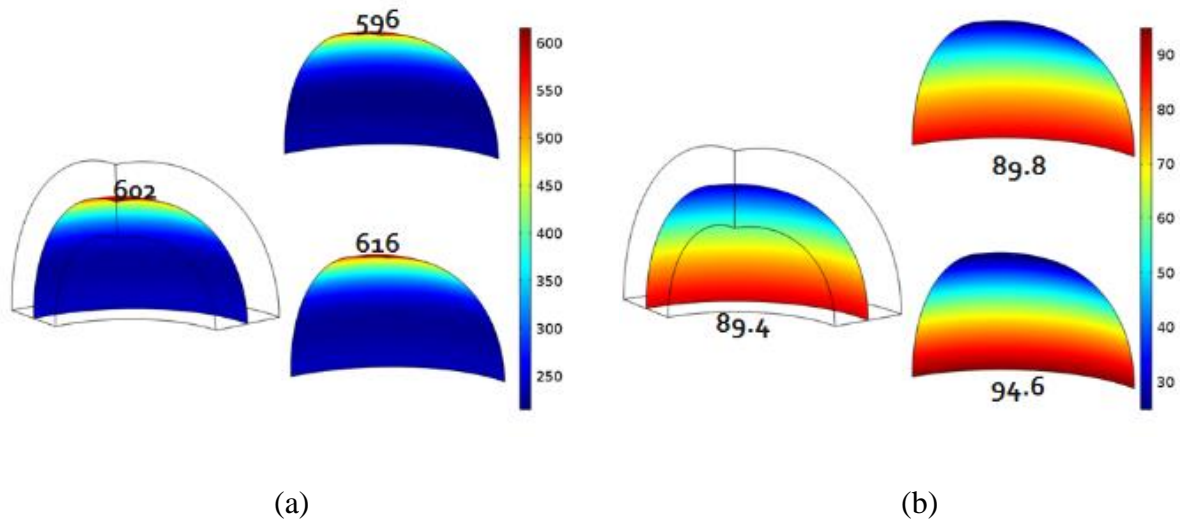


Figura 5. Resultados en la superficie media; (a) desplazamiento total, (b) esfuerzo de von Mises.

Elipsoide a presión interna.

Para probar la efectividad de las ecuaciones es necesario plantear problemas con una mayor complejidad. Se propone un elipsoide sometido a presión interna, cuyas longitudes de los semiejes son a, b y c para los ejes x, y y z respectivamente. Para este problema los parámetros geométricos son: $a = b = 1 \text{ m}$, $c = 3 \text{ m}$ y $h = 0.1 \text{ m}$. Con estos parámetros geométricos la relación η varía en la superficie media, siendo la mayor $\eta_{m\acute{a}x} = 0.3$ (véase Figura 7). La presión interna es $p = 1 \text{ kPa}$. Este caso es analizado haciendo uso de un modelo 3D, el modelo para cascarones utilizado por el software COMSOL y el modelo SAM-H. Los resultados de algunos esfuerzos en la superficie media se muestran en Figura 6.

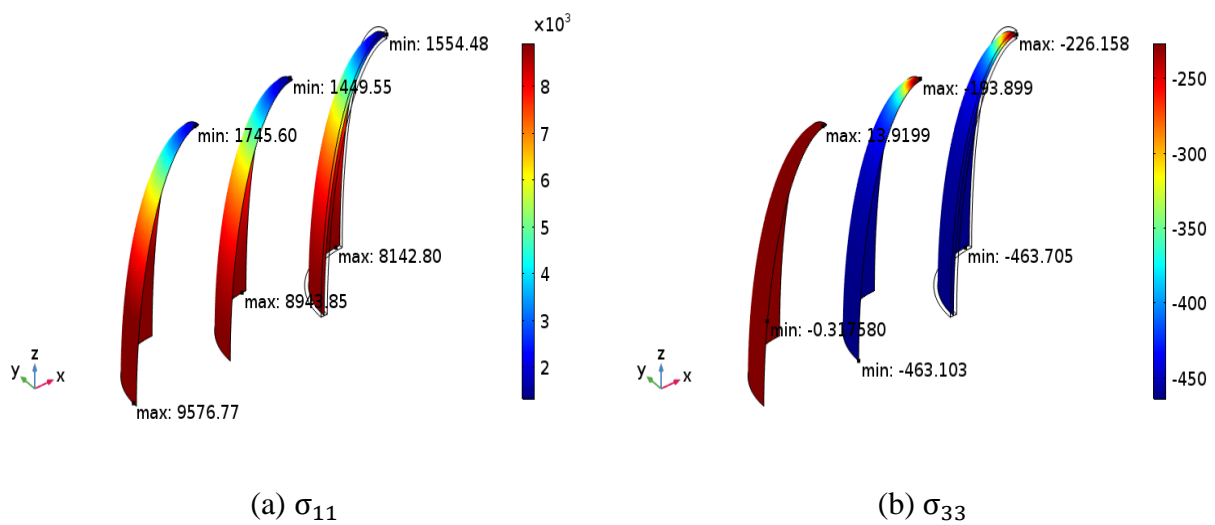


Figura 6. Esfuerzos en la superficie media; modelo de cascarones COMSOL (izquierda), SAM-H (centro) y 3D (derecha)

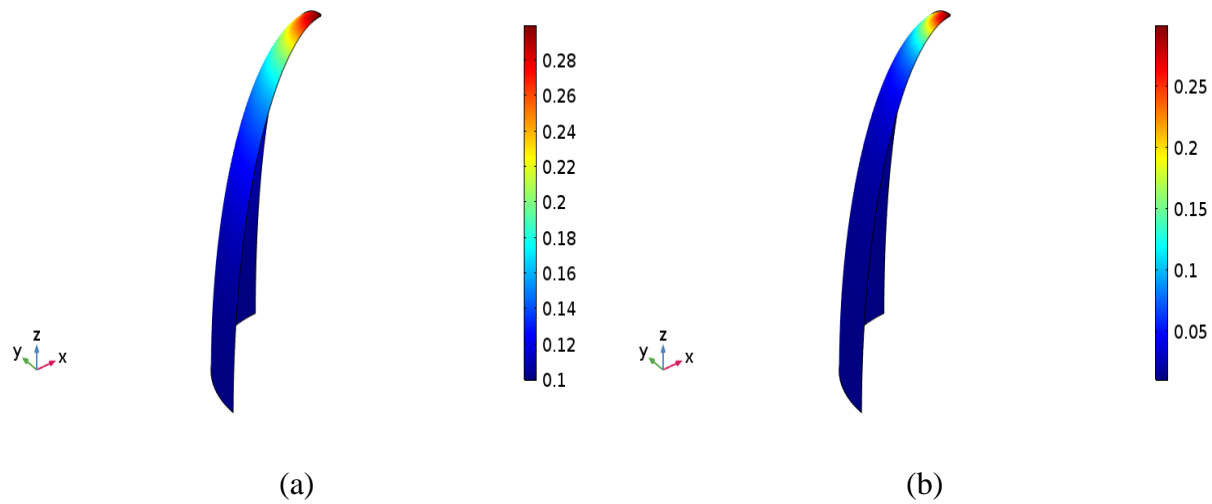


Figura 7. Relaciones espesor-radius de curvatura principales; (a) $\frac{e}{R_1}$, (b) $\frac{e}{R_2}$.

Por último, se revisan los resultados del esfuerzo σ_{33} en la superficie interna de la elipse, pues es un valor dado, una condición que se debe de cumplir, ya que $\sigma_{33} = p$.

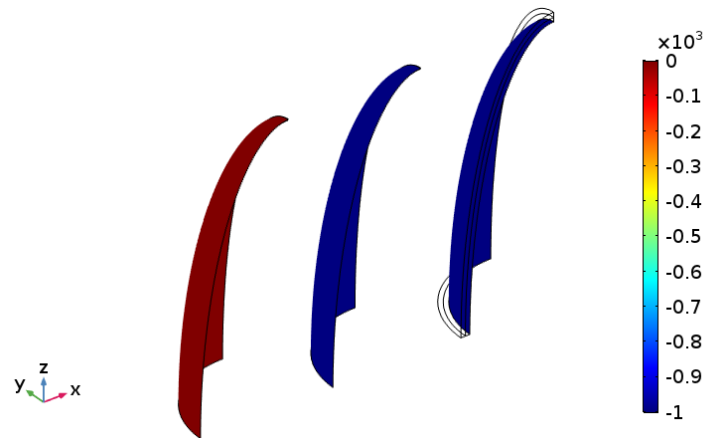


Figura 8. Esfuerzo σ_{33} en la superficie inferior del cascarón; modelo de cascarones COMSOL (izquierda), SAM-H (centro) y 3D (derecha)

5. Conclusiones.

Desde la solución analítica de las ecuaciones es evidente que las predicciones hechas por el modelo SAM-H tienen gran precisión, tanto para los esfuerzos como para los desplazamientos. En un análisis más profundo del error relativo en la Figura 4, llegamos a la recomendación de que las ecuaciones sean utilizadas cuando $\eta \leq 0.3$, ya que con este valor el error es menor al 10%. También al realizar problemas para los cuales recurrimos al software COMSOL se obtuvieron buenos resultados comparando contra el modelo 3D. Es importante señalar se debe ser cuidadoso con los resultados mostrados de la esfera sometida a su propio peso. Los

desplazamientos totales y esfuerzos de von Mises en la superficie media son resultantes del campo desplazamientos y campo de esfuerzos, por lo que no se puede apreciar variación significativa respecto a la solución 3D; sin embargo, si se analizaran uno a uno los componentes de los desplazamientos y esfuerzos si sería posible percibir una diferencia significativa respecto al 3D, ya que $\eta = 0.5$. Con el último ejemplo se confirma que el modelo tiene un buen comportamiento con geometrías más complejas, pero se debe tener precaución de que la variación de η respecto a la superficie media no sea alta; Pues las derivadas de η respecto a las coordenadas curvilíneas ξ_1 y ξ_2 fueron despreciadas en las ecuaciones del modelo SAM-H. Una de las grandes virtudes del modelo SAM-H contra las teorías utilizadas en la actualidad es que cumple con las ecuaciones de equilibrio y condiciones de frontera 3D, como se puede apreciar en Figura 8.

Por todo lo anterior, podemos decir que se desarrolló un buen modelo para predecir el comportamiento de cascarones moderadamente gruesos con ventajas respecto a las demás teorías. El modelo permite reducir el problema 3D a uno 2D, por lo que al hacer análisis numéricos se reduce el costo computacional del problema sin sacrificar la calidad de los resultados; siempre teniendo en cuenta las limitaciones del modelo.

6. Anexos.

6.1. Coeficientes de la aproximación de esfuerzos.

En esta sección se muestran las expresiones de los coeficientes de la aproximación de esfuerzos que aparece en las ecuaciones (1)-(3). Los coeficientes son:

- Para los esfuerzos en el plano:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{h} (N_{\alpha\beta} - \kappa_{3-\beta} M_{\alpha\beta}), \\ \sigma_{\alpha\beta}^1 &= \frac{12}{h^2} M_{\alpha\beta} - \kappa_{3-\beta} N_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{28}$$

- Para los esfuerzos cortantes transversales:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha 3}^0 &= \frac{Q_\alpha}{h} - \frac{h}{12} \kappa_{\alpha-3} (\tau_\alpha^+ + \tau_\alpha^-), \\ \sigma_{\alpha 3}^1 &= (\tau_\alpha^+ + \tau_\alpha^-) + \frac{1}{5} \sigma_{\alpha 3}^3, \\ \sigma_{\alpha 3}^2 &= \frac{1}{h} Q_\alpha - \frac{1}{2} (\tau_\alpha^+ - \tau_\alpha^-) - \frac{h}{12} \kappa_{3-\alpha} (\tau_\alpha^+ + \tau_\alpha^-), \\ \sigma_{\alpha 3}^3 &= \frac{2}{a_1 a_2} \left(\kappa_2 \frac{\partial a_2 M_{\alpha 1}}{\partial \xi_1} + \kappa_1 \frac{\partial a_1 M_{\alpha 2}}{\partial \xi_2} + \kappa_{\alpha-3} M_{\alpha-3 \alpha} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi_{\alpha-3}} - \kappa_\alpha M_{\alpha-3 \alpha-3} \frac{\partial a_{\alpha-3}}{\partial \xi_\alpha} \right) \\ &\quad + \left[Q_\alpha - \frac{h}{2} (\tau_\alpha^+ - \tau_\alpha^-) \right] (\kappa_\alpha + 3\kappa_1 + 3\kappa_2).\end{aligned}\tag{29}$$

- Para el esfuerzo normal fuera del plano:

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^0 &= \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \sigma_{33}^2 + \frac{1}{15}\sigma_{33}^4, \\
\sigma_{33}^1 &= \sigma^+ + \sigma^- + \frac{1}{5}\sigma_{33}^3, \\
\sigma_{33}^2 &= \frac{h}{30} \operatorname{div} \left[\widetilde{\mathbf{div}} (\widetilde{\mathbf{M}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}) - 2\widetilde{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \widetilde{\mathbf{Q}} \right] - \frac{1}{h} \widetilde{\mathbf{M}} : \widetilde{\boldsymbol{\kappa}} \\
&\quad + \frac{h}{12} \operatorname{div} \left[\widetilde{\boldsymbol{\tau}}^+ + \widetilde{\boldsymbol{\tau}}^- + \frac{h}{10} (4\widetilde{\boldsymbol{\kappa}} + 5\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot (\widetilde{\boldsymbol{\tau}}^+ - \widetilde{\boldsymbol{\tau}}^-) \right] \\
&\quad + \frac{h}{12} \left[(\kappa_1 + \kappa_2) \left(2\sigma_{33}^1 - \frac{3}{5}\sigma_{33}^3 + hf_3 \right) - \frac{4}{5h}\sigma_{33}^4 \right], \\
\sigma_{33}^3 &= -\operatorname{div} \widetilde{\mathbf{Q}} + \frac{h}{4} \operatorname{div} [2(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}^+ - \widetilde{\boldsymbol{\tau}}^-) - h\widetilde{\boldsymbol{\kappa}} \cdot (\widetilde{\boldsymbol{\tau}}^+ + \widetilde{\boldsymbol{\tau}}^-)], \\
\sigma_{33}^4 &= -\frac{3h}{14} \operatorname{div} \left[\widetilde{\mathbf{div}} (\widetilde{\mathbf{M}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}) \right] + \frac{3h}{7} \operatorname{div} [(2\widetilde{\boldsymbol{\kappa}} + \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \widetilde{\mathbf{Q}}] \\
&\quad - \frac{3h^2}{14} \operatorname{div} [(2\widetilde{\boldsymbol{\kappa}} + \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot (\widetilde{\boldsymbol{\tau}}^+ - \widetilde{\boldsymbol{\tau}}^-)].
\end{aligned} \tag{30}$$

donde

$$\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}' = \begin{pmatrix} \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

6.2. Vectores y matrices en ecuaciones de comportamiento.

Primero se definen las siguientes complianzas:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{S}} &= \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1112} & S_{1121} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2212} & S_{2221} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1212} & S_{1221} \\ S_{2111} & S_{2122} & S_{2112} & S_{2121} \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\mathbf{S}}^c &= \begin{pmatrix} S_{11}^c & S_{12}^c \\ S_{21}^c & S_{22}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2S_{1133} & 2S_{1233} \\ 2S_{2133} & 2S_{2233} \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\mathbf{S}}^Q &= \begin{pmatrix} S_{11}^Q & S_{12}^Q \\ S_{21}^Q & S_{22}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4S_{1313} & 4S_{1323} \\ 4S_{2313} & 4S_{2323} \end{pmatrix}, \\
S^\sigma &= S_{3333}
\end{aligned} \tag{32}$$

donde $S_{ijkl} \forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}$ son las componentes del tensor 3D de cuarto orden de complianzas $\widetilde{\mathbf{S}}$.

La matriz \mathbf{C} se define como:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^A & \mathbf{C}^{B1} + \mathbf{C}^{B2} \\ \mathbf{C}^{c1} + \mathbf{C}^{c2} & \frac{12}{h^2} \mathbf{C}^A \end{pmatrix} \quad (33)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^A &= \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1112} & S_{1121} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2212} & S_{2221} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1212} & S_{1221} \\ S_{2111} & S_{2122} & S_{2112} & S_{2121} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}^{B1} = \mathbf{C}^{c1} &= \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{h} \begin{pmatrix} S_{1111} & 0 & 0 & S_{1121} \\ 0 & -S_{2222} & -S_{2212} & 0 \\ 0 & -S_{1222} & -S_{1212} & 0 \\ S_{2111} & 0 & 0 & S_{2121} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}^{B2} &= -\frac{1}{10h} \begin{pmatrix} 6S_{11}^c \kappa_1 & S_{22}^c \kappa_1 + 5S_{11}^c \kappa_2 & S_{12}^c \kappa_1 & S_{21}^c \kappa_1 \\ 5S_{22}^c \kappa_1 + S_{11}^c \kappa_2 & 6S_{22}^c \kappa_2 & S_{12}^c \kappa_2 & S_{21}^c \kappa_2 \\ 5S_{12}^c \kappa_1 & 5S_{12}^c \kappa_2 & 0 & 0 \\ 5S_{21}^c \kappa_1 & 5S_{21}^c \kappa_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}^{c2} &= -\frac{1}{10h} \begin{pmatrix} 6S_{11}^c \kappa_1 & S_{22}^c \kappa_1 + 5S_{11}^c \kappa_2 & 5S_{12}^c \kappa_1 & 5S_{21}^c \kappa_1 \\ 5S_{22}^c \kappa_1 + S_{11}^c \kappa_2 & 6S_{22}^c \kappa_2 & 5S_{12}^c \kappa_2 & 5S_{21}^c \kappa_2 \\ 5S_{12}^c \kappa_1 & 5S_{12}^c \kappa_2 & 0 & 0 \\ 5S_{21}^c \kappa_1 & 5S_{21}^c \kappa_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Los vectores \mathbf{c}^+ \mathbf{c}^- se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^+ &= -\frac{S^\sigma}{140} \begin{pmatrix} \mathbf{3hc}^a \\ 70\mathbf{c}^a \end{pmatrix} + \frac{1}{60} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^S(15\mathbf{c}^b + 8hc^c + 5hc^d) \\ \frac{1}{h} \mathbf{C}^S(36\mathbf{c}^b + 18hc^c + 3hc^d) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}^- &= \frac{S^\sigma}{140} \begin{pmatrix} -\mathbf{3hc}^a \\ 70\mathbf{c}^a \end{pmatrix} + \frac{1}{60} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^S(-15\mathbf{c}^b + 8hc^c + 5hc^d) \\ \frac{1}{h} \mathbf{C}^S(36\mathbf{c}^b - 18hc^c - 3hc^d) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (35)$$

donde

$$\mathbf{c}^a = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^s = \begin{pmatrix} S_{11}^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{12}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{22}^c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}^c = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_2 \\ \kappa_1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{c}^d = \begin{pmatrix} \kappa_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

El vector \mathbf{c}^3 es:

$$\mathbf{c}^3 = -\frac{h^2 s^\sigma}{210} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^a \\ 0 * \mathbf{c}^a \end{pmatrix} + \frac{1}{120} \begin{pmatrix} h^2 \mathbf{c}^s (6\mathbf{c}^c + 5\mathbf{c}^d) \\ 12 \mathbf{c}^s \mathbf{c}^b \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Por último, las matrices de complianza de cortante \mathbf{D} , \mathbf{D}^+ y \mathbf{D}^- tienen las siguientes expresiones:

$$\mathbf{D} = \frac{6}{5h} \begin{pmatrix} S_{11}^Q & S_{12}^Q \\ S_{21}^Q & S_{22}^Q \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^+ = -\frac{1}{60} \begin{pmatrix} S_{11}^Q (6 + 5h\kappa_2) & S_{12}^Q (6 + 6h\kappa_1 - h\kappa_2) \\ S_{21}^Q (6 - h\kappa_1 + 6h\kappa_2) & S_{22}^Q (6 + 5h\kappa_1) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{D}^- = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} S_{11}^Q (6 - 5h\kappa_2) & S_{12}^Q (6 - 6h\kappa_1 + h\kappa_2) \\ S_{21}^Q (6 + h\kappa_1 - 6h\kappa_2) & S_{22}^Q (6 - 5h\kappa_1) \end{pmatrix}.$$

Referencias

- Bower, A. F. (2012). *Applied Mechanics of Solids*. Obtenido de <http://www.solidmechanics.org/>
- Love, A. (1888). The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* , 491-546.
- Naghdi, P. M. (1973). The Theory of Shells and Plates. En C. Truesdell, *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity* (págs. 425-640). Springer Berlin Heidelberg.
- Reddy, J. N. (2006). *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. Boca Roca: CRC Press.
- Sanders Jr, J. L. (1959). An improved first-approximation theory for thin shells.
- Ventsel, E., & Krauthammer, T. (2001). *Thin Plates and Shells Theory: Analysis, and Applications*. CRC Press.