

**CALCUL NON LINEAIRE D'EFFETS DE BORD POUR DES MATERIAUX  
MULTICOUCHES A L'AIDE D'UN MODELE MULTIPARTICULAIRE**

**NON LINEAR CALCULATIONS OF EDGE EFFECTS IN COMPOSITE  
LAMINATES WITH A MULTI-PARTICLE MODEL**

Gilberto S. Aquino de los Ríos, Alberto Díaz Díaz\*, Rubén Castañeda Balderas

Centro de Investigación en Materiales Avanzados Avanzados (CIMAV)

Miguel de Cervantes 120. Compl. Ind. Chih.

31109 Chihuahua, Chih. MEXIQUE

\*e-mail : alberto.diaz@cimav.edu.mx

**RESUME**

Dans ce travail, les auteurs considèrent le problème du calcul des contraintes dans un multicouche avec bords chargés et avec couches et interfaces élastoplastiques endommageables. Le modèle multiparticulaire M4-5N originalement développé pour le calcul des efforts d'interface dans des multicouches élastiques est modifié pour le calcul des phénomènes non linéaires du problème. La méthode LATIN est ensuite employée pour la résolution du problème non linéaire. Les auteurs montrent à la fin quelques exemples d'application pour lesquels le modèle peut aider à la prédiction du délaminage.

**ABSTRACT**

In this paper, the authors consider the problem of the calculation of stresses in a laminate subjected to mechanical loads on its edges. The layers and the interfaces have an elastoplastic behavior. Moreover, the interfaces are damageable. The multi-particle model M4-5N which has been previously developed for the calculation of interlaminar stresses in elastic laminates is modified in order to compute the non linear phenomena. The LATIN method is then applied for the resolution of the non linear problem. The authors show some application examples for which the model can help predict delamination onset.

**MOTS CLES : MODELE MULTI-PARTICULAIRE, MULTICOUCHE, EFFET DE BORD,  
PLASTICITE, ENDOMMAGEMENT**

**KEYWORDS : MULTI-PARTICLE MODEL, LAMINATE, EDGE EFFECT, PLASTICITY,  
DAMAGE**

## INTRODUCTION

Les structures multicouches présentent souvent des concentrations de contraintes près des bords au voisinage des interfaces. Ces contraintes provoquent des délaminages qui donnent lieu à la ruine de la structure. Il est donc important de calculer les effets de bord et à cause du comportement des interfaces et des couches, il est nécessaire de prendre en compte des phénomènes tels que l'endommagement et la plasticité.

Les auteurs proposent l'utilisation du modèle de plaques multicouches dit multiparticulaire M4-5N. Le modèle a été développé et validé pour des problèmes élastiques (Carreira et al, 02) et a déjà permis de proposer des critères de délaminage (Díaz et Caron, 06). Avec le M4-5N, chaque couche est considérée comme une plaque de Reissner (Reissner, 45) et liée aux couches adjacentes par le biais des efforts d'interface généralisés. Dans l'écriture du comportement élastique, le modèle prend en compte l'existence des déformations anélastiques généralisées. Pour le cas de couches élastoplastiques et interfaces élastoplastiques endommageables, les auteurs adaptent le modèle 3D développé dans (Allix et al. 96) et définissent l'expression des champs anélastiques et des équations d'écoulement généralisés moyennant des intégrations des puissances 3D dissipées sur l'épaisseur de chacune des couches.

Dans ce travail, premièrement le modèle M4-5N avec équations non linéaires est développé pour un multicouche avec bords chargés. La méthode LATIN (Allix et Vidal, 02) est ensuite employée pour résoudre les équations. Les auteurs montrent finalement des exemples de calcul qui prouvent l'efficacité des calculs et l'intérêt de ses résultats pour la prédiction du délaminage.

## MODELE

On considère le multicouche avec bords chargés de la figure 1. Les couches et les interfaces ont un comportement élastoplastique. Les interfaces sont en plus endommageables. Le but du problème est la détermination du champ des contraintes. On applique le modèle M4-5N à la résolution du problème. Le champ de contraintes dans chaque couche est approché par des polynômes en  $z$ . Les coefficients de ces polynômes sont des fonctions linéaires des efforts généralisés (des champs dépendant de  $x$  et  $y$ ). Les équations du modèle sont obtenues moyennant l'emploi de la méthode de Reissner (Carreira et al, 02)

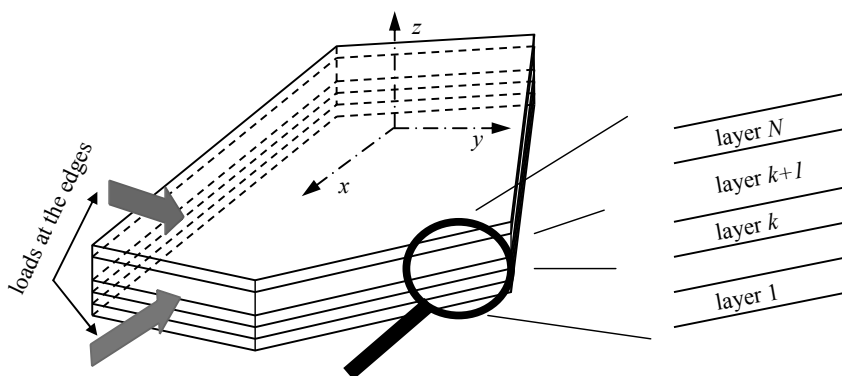


Figure 1 : Multicouche étudié.  
*Considered laminate.*

Le modèle de plaques M4-5N présenté dans (Díaz et al, 01) prend déjà en compte des déformations anélastiques généralisées dans l'écriture du comportement élastique des couches et des interfaces. Ces équations sont du type:

$$\tilde{D}(x, y) - \tilde{D}^a(x, y) = \tilde{S} \cdot \tilde{F}(x, y) \quad (1)$$

où  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{D}^a$ ,  $\tilde{S}$  et  $\tilde{F}$  sont des champs de déformations généralisées, de déformations anélastiques généralisées (fonctions linéaires des déformations anélastiques 3D), de souplesses généralisées, d'efforts généralisés. Il reste à déterminer les champs anélastiques pour notre problème de couches élastoplastiques et interfaces élastoplastiques endommageables.

### Comportement plastiques des couches

Présentons d'abord les équations 3D de plasticité avec écrouissage pour des couches orthotropes (Allix et al, 96). Le critère de plasticité s'écrit :

$$\begin{cases} f(\bar{\sigma}, R) = \sqrt{a_L \sigma_{LL}^2 + a_T \sigma_{TT}^2 + a_N \sigma_{NN}^2 + a_{LT} \sigma_{LT}^2 + a_{LN} \sigma_{LN}^2 + a_{TN} \sigma_{TN}^2} - R(p) - R_0 = 0 \\ R = K p^\alpha \end{cases} \quad (2)$$

où  $a_L$ ,  $a_T$ ,  $a_N$ ,  $a_{LT}$ ,  $a_{LN}$ ,  $a_{TN}$ ,  $R_0$ ,  $K$  et  $\alpha$  sont des propriétés du matériau ;  $L$ ,  $T$  et  $N$  sont les directions principales du matériau, respectivement ;  $p$  est la déformation plastique cumulée. Quant aux lois d'écoulement, on obtient par exemple :

$$\varepsilon_{LT}^p = \frac{1}{2} a_{LT} p \frac{\sigma_{LT}}{R + R_0} \text{ avec } p \geq 0. \quad (3)$$

Ecrivons maintenant ces équations en fonction des champs généralisés du modèle M4-5N. D'abord, on suppose que la plasticité cumulée est constante sur l'épaisseur de la couche. Son expression est obtenue en injectant l'expression du champ de contrainte approché du M4-5N dans l'équation (2), en remplaçant  $R$  par sa valeur fonction de  $p$  et en prenant la valeur moyenne sur l'épaisseur de l'expression sous la racine carrée. Cette approximation de  $p$  est d'autant plus précise que les couches du modèle sont de faible épaisseur. On écrit ensuite la densité de puissance 3D dissipée par la plasticité :

$$\mathcal{P}_a = 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p. \quad (4)$$

Puis, on introduit l'approximation du champ de contrainte du M4-5N et on fait une intégration de cette densité de puissance sur l'épaisseur de chaque couche. On injecte ensuite les équations d'écoulement. Finalement, on identifie simplement les taux de déformations anélastiques généralisées. On obtient par exemple pour les déformations plastiques généralisées de type membrane de la couche  $i$  :

$$\varepsilon_{TT}^{i,p}(x, y) = a^i p^i(x, y) \frac{N_{TT}^i(x, y)}{e^i \left( K^i (p^i(x, y))^{\alpha^i} + R_0^i \right)} \quad (5)$$

où  $N_{TT}^i$  est l'effort de membrane normal de la couche  $i$  dans la direction T. Avec l'expression de la plasticité cumulée dans la couche  $i$  ( $p^i$ ), le critère de plasticité exprimé en fonction des efforts généralisés et les équations d'écoulement généralisées on définit complètement le modèle M4-5N avec plasticité.

### Comportement plastique endommageable des interfaces

Dans (Díaz et al, 2001), le modèle M4-5N fait apparaître des discontinuités du champ de déplacement aux interfaces entre les couches de façon à pouvoir modéliser des glissements d'interface mis en évidence dans (Díaz et Caron, 2006). On suppose que l'interface est une

entité de faible épaisseur ( $e^{\text{int}}$ ) vis-à-vis des épaisseurs des couches et est modélisé par un matériau isotrope. Montrons quelques équations qui montrent la modélisation du comportement des interfaces. Le comportement élastique de l'interface  $j,j+1$  entre les couches  $j$  et  $j+1$  par cisaillement  $\tau_{xz}^{j,j+1}$  s'écrit :

$$\gamma_{xz}^{j,j+1}(x,y) - \gamma_{xz}^{j,j+1,p}(x,y) = 2e^{\text{int}} \frac{\tau_{xz}^{j,j+1}(x,y)}{G_0^{\text{int}}(1-d^{j,j+1}(y))} \quad (6)$$

où  $\gamma_{xz}^{j,j+1}$  est la discontinuité (à l'échelle des couches) des déplacements  $u_x$  à l'interface,  $\gamma_{xz}^{j,j+1,p}$  est un glissement d'origine plastique,  $G_0^{\text{int}}$  le module de cisaillement du matériau vierge,  $d^{j,j+1}$  est le paramètre d'endommagement. Les 2 autres équations de comportement (directions  $y$  et  $z$ ) sont analogues. Le critère de plasticité s'écrit :

$$\begin{aligned} \sqrt{(\tau_{xz}^{j,j+1})^2 + (\tau_{yz}^{j,j+1})^2 + (\sigma_{zz}^{j,j+1})^2} - \sigma^0 - K^{j,j+1}(p^{j,j+1})^{\alpha^{j,j+1}} &= 0 \\ p^{j,j+1} &= \frac{1}{e^{\text{int}}} \sqrt{\frac{1}{3} \left( 2(\gamma_{xz}^{j,j+1})^2 + 2(\gamma_{yz}^{j,j+1})^2 + 2(\gamma_{zz}^{j,j+1})^2 \right)} \end{aligned} \quad (7)$$

Les lois d'écoulement sont analogues à celle de  $\gamma_{xz}^{j,j+1,p}$  :

$$\dot{\gamma}_{xz}^{j,j+1,p} = 3e^{\text{int}} p^{j,j+1} \frac{\tau_{xz}^{j,j+1}}{\left( \sigma^0 + K^{j,j+1}(p^{j,j+1})^{\alpha^{j,j+1}} \right)} \quad (8)$$

Quant à l'endommagement, l'établissement des équations s'inspire du travail de (Allix et al, 96) :

$$\begin{aligned} Y &= \frac{(\tau_x^{j,j+1})^2 + (\tau_y^{j,j+1})^2}{G_0^{\text{int}}(1-d^{j,j+1})^2} + \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{zz}^{j,j+1}]_+^2}{E_0^{\text{int}}(1-d^{j,j+1})^2} \\ \begin{cases} d^{j,j+1} = \sup_{\tau \leq t} \left( \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c}} \right) & \text{si } d^{j,j+1} < 1 \\ \text{sinon } d^{j,j+1} = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Ces équations couplées aux équations globales du modèle M4-5N constituent l'ensemble des équations du problème à résoudre

## METHODE DE RESOLUTION

Le multicouche est soumis à ses bords à des chargements mécaniques. Supposons que les champs généralisés du modèle M4-5N soient connus au pas de chargement  $c$ . Le problème est le calcul de champs généralisés pour le nouveau pas de chargement  $c+1$ . Pour résoudre le problème, nous employons la méthode LATIN (Allix et Vidal, 02). Les équations linéaires et non linéaires sont séparées. Deux sous problèmes sont considérés : le premier est non linéaire (problème A) et le deuxième est linéaire (problème B). Pour simplifier la présentation, nous supposons que le seul comportement non linéaire provient de l'endommagement des interfaces (dans le cas général où il y a plasticité le principe est le même).

Pour le problème A, dans l'itération  $n+1$ , on a comme donnée la solution du problème B dans l'itération  $n$  :

$$s_{B,n} = \left( \bar{F}_{B,n}, \bar{U}_{B,n}, \bar{\gamma}_{B,n}^{j,j+1}, d_{B,n}^{j,j+1} \right) \quad (10)$$

où  $\tilde{F}_{B,n}$ ,  $\tilde{U}_{B,n}$ ,  $\tilde{\gamma}_{B,n}^{j,j+1}$  et  $d_{B,n}^{j,j+1}$  définissent les efforts, les déplacements, les discontinuités d'interface et l'endommagement d'interface généralisés, respectivement. Les équations du problème A sont les équations (6), (9) et l'équation suivante :

$$\tilde{\gamma}_{A,n+1}^{j,j+1} = \tilde{\gamma}_{B,n}^{j,j+1}. \quad (11)$$

Ces équations se résolvent en cascade sans aucune difficulté et on obtient comme solution du problème B dans l'itération  $n+1$  :

$$s_{A,n+1} = (\tilde{F}_{A,n+1}, \tilde{U}_{A,n+1}, \tilde{\gamma}_{A,n+1}^{j,j+1}, d_{A,n+1}^{j,j+1}). \quad (12)$$

Pour le problème B, dans l'itération  $n+1$ , on a comme donnée la solution du problème A :  $s_{A,n+1}$ . Les équations du problème B sont les équations de comportement élastique du M4-5N, les équations d'équilibre généralisé, les conditions aux limites, et les linéarisations des équations non linéaires (moyennant une différentiation). Par exemple, la linéarisation de l'équation (6) donne :

$$\gamma_{xz,B,n+1}^{j,j+1}(x,y) = \gamma_{xz,A,n+1}^{j,j+1}(x,y) + 2e^{\text{int}} \frac{\tau_{x,B,n+1}^{j,j+1} - \tau_{x,A,n+1}^{j,j+1}}{G_0^{\text{int}}(1-d_{A,n+1}^{j,j+1})} + 2e^{\text{int}} \frac{\tau_{x,A,n+1}^{j,j+1}(d_{B,n+1}^{j,j+1} - d_{A,n+1}^{j,j+1})}{G_0^{\text{int}}(1-d_{A,n+1}^{j,j+1})^2} \quad (13)$$

L'ensemble d'équations du problème B peut être résolu par une méthode d'éléments finis.

De cette façon, en itérant on obtient après convergence la solution du problème général pour le pas de chargement  $c+1$ .

## EXEMPLES D'APPLICATION

Les exemples d'application dans ce travail considèrent des multicouches symétriques infiniment longs dans la direction des  $x$ , soumis à des déformations uniformes dans cette même direction, des chargements aux bords uniformes en  $x$ . De cette façon, la résolution du problème linéaire B, peut être faite à l'aide d'une légère adaptation du logiciel DEILAM développé dans (Díaz et al, 2002). Dans tous les cas traités jusqu'à présent, les résultats convergent rapidement comme prévu par la méthode LATIN.

### Problème de bord libre, multicouches $(\pm \theta_n)_s$

Les multicouches en carbone-époxy de type  $(\pm \theta_n)_s$  présentent des délaminages aux interfaces  $\theta/-\theta$  à cause des effets de bord sur les efforts d'interface lorsqu'ils sont soumis à une traction. De plus il existe un effet d'épaisseur sur l'initiation du délaminage.

Appliquons notre modèle au calcul de ces empilements. Les caractéristiques plastiques du matériau considéré ont été identifiées par (Nguyen, 2000) et (Díaz et Caron, 2006). Les propriétés du matériau apparaissant dans le modèle d'endommagement doivent être identifiées avec précision dans un futur travail. Ici, ces propriétés ont été choisies arbitrairement mais en essayant d'avoir des valeurs critiques d'initiation de délaminage semblables aux valeurs expérimentales dans (Díaz et Caron, 2006). Les valeurs de  $\theta$  considérées sont  $10^\circ$  et  $30^\circ$ .

Lorsqu'on fait le calcul des empilements  $(\pm 10_n)_s$ , on s'aperçoit que la plasticité dans les couches est négligeable par rapport à la plasticité et aux endommagements aux interfaces 10/-10. Dans la figure 2, on a tracé les valeurs au bord des endommagements aux interfaces 10/-10 des empilements  $(\pm 10_n)_s$  en fonction de la charge de traction appliquée. On voit qu'il existe un effet d'épaisseur sur l'initiation du délaminage et cet effet peut être ajusté à l'aide des paramètres apparaissant dans le modèle d'endommagement de l'interface de façon à reproduire le mieux possible les résultats expérimentaux. Dans un travail plus approfondi, on fera une

identification rigoureuse des propriétés du matériau pour prédire correctement les effets d'épaisseur et l'initiation du délaminage.

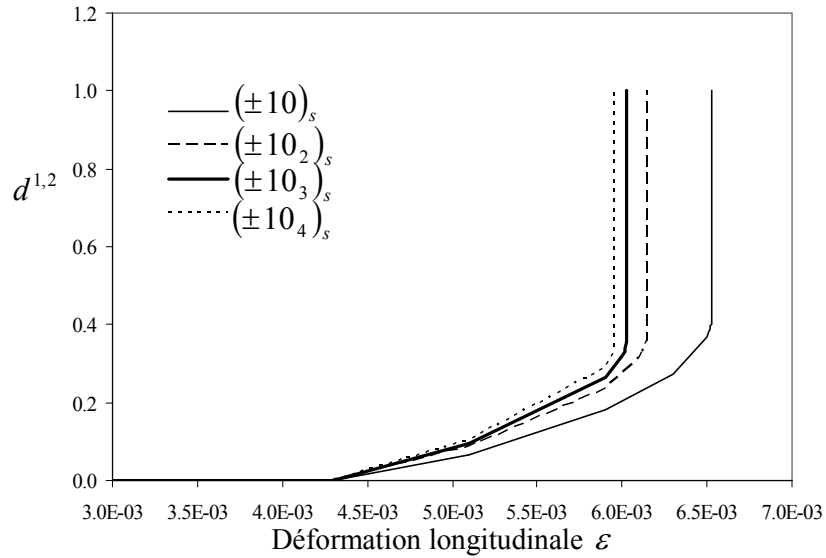


Figure 2. Endommagement au bord des interfaces 10/-10 des multicouches  $(\pm 10_n)_s$   
*Edge damage at the interfaces 10/-10 in  $(\pm 10_n)_s$  laminates*

D'autre part, théoriquement, on s'aperçoit que le comportement global des multicouches  $(\pm 10_n)_s$  en traction est quasi linéaire avant l'initiation du délaminage alors que le comportement global des multicouches  $(\pm 30_n)_s$  présente un comportement plastique non négligeable dans les couches (voir figure 3). Ceci est en accord avec les observations expérimentales de (Lorriot et al, 03).

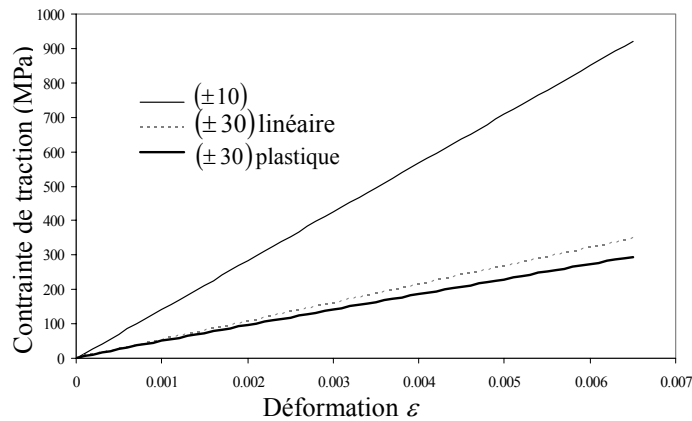


Figure 3. Graphe de traction pour les multicouches  $(\pm 10)_s$  et  $(\pm 30)_s$   
*Tensile stress vs. strain for  $(\pm 10)_s$  et  $(\pm 30)_s$  laminates*

## Plasticité de la colle dans un joint à double recouvrement

On considère le joint à double recouvrement de la figure 4. La colle de faible épaisseur est modélisée par une interface élastoplastique avec écrouissage négatif. Dans la figure 4, on montre les courbes des efforts de cisaillement pour deux niveaux de chargement : pour le premier, la colle est parfaitement élastique et pour la deuxième la colle a commencée à plastifier. On observe un front de plasticité qui se propage à partir des bords de l'interface vers le centre de l'assemblage. Lorsqu'on atteint une valeur critique de chargement il y a amorce de délaminage (le cisaillement vaudrait zéro au bord). On peut prévoir une valeur critique de longueur de recouvrement (longueur de recouvrement optimale) au-delà de laquelle la taille de la zone qui plastifie avant le délaminage est la même et donc la charge  $F$  qui provoque le délaminage est la même. Cette longueur de recouvrement optimale a déjà été mise en évidence expérimentalement (Hadj-Ahmed, 1999).

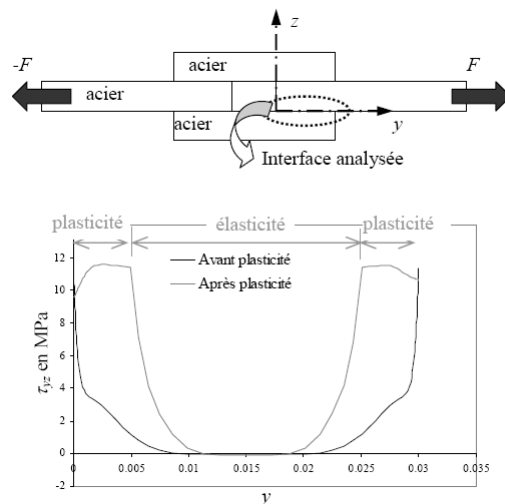


Figure 4. Géométrie du joint analysé et efforts d'interface  
*Geometry of the adhesive joint and interlaminar stress*

## CONCLUSION

Nous avons proposé dans ce travail un modèle et une méthode de calcul de la plasticité et de l'endommagement dans des multicouches laminés. De part les calculs de l'endommagement d'interface, il est possible de prévoir l'initiation du délaminage dans des structures laminées, même en présence de la plasticité dans les couches. En perspective, nous ferons une campagne d'essais avec des composites en carbone-epoxy pour identifier les propriétés qui apparaissent dans le modèle et nous ferons une validation théorique et expérimentale des calculs et des prédictions d'initiation de délaminage.

## BIBLIOGRAPHIE

Allix O., Bahlouli N., Cluzel C., Perret L., 1996. "Modelling and identification of temperature-dependent mechanical behaviour of the elementary ply in carbon/epoxy laminates". *Composites Science and Technology*, v. 56, pp 883-888.

- Allix O., Vidal P., 2002. "A new multi-solution approach suitable for structural identification problems". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, pp 2727-2758.
- Carreira R. P., Caron J. F., Diaz Diaz A., 2002. "Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations". *Mechanics of Materials*, v. 34, pp. 217-230.
- Diaz Diaz A., Caron J. F., Carreira R. P., 2001. "Un modèle de stratifiés". *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, v. 329, pp. 873-879.
- Diaz Diaz A., Caron J. F., Carreira R. P., 2002. "Software application for evaluating interfacial stresses in inelastic symmetrical laminates with free edges". *Composite Structures*, v. 58, pp 195-208.
- Diaz Diaz A., Caron J. F., 2006. "Prediction of the onset of mode III delamination in carbon-epoxy laminates". *Composite Structures*, v. 72, pp 438-445.
- Diaz Diaz A., Caron J. F., 2006. "Interface plasticity and delamination onset prediction". *Mechanics of Materials*, v. 38, pp 648-663.
- Hadj-Ahmed R., 1999. *Modélisation des assemblages collés : application à l'optimisation du transfert des efforts par cisaillement*. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Lorriot Th., Marion G., Harry R., Wargnier. H., 2003. "Onset of free-edge delamination in composite laminates under tensile loading". *Composites Part B: Engineering*, v. 34, pp 459-471.
- Nguyen K. V., 2000. *Introduction de la plasticité de couche dans les modèles multiparticulaires de matériaux multicouches et validations expérimentales*. Mémoire de DEA de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées..
- Reissner E., 1945. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates". *Journal of Applied Mechanics*, v. A, pp 69-77.