

MODELO PARA CASCARONES HOMOGÉNEOS MEDIANTE UNA APROXIMACIÓN MIXTA.

Axel Fernando Domínguez Alvarado,
Alberto Díaz Díaz.

Introducción.

En ingeniería estructural, los modelos de cascarones (fig.1) pueden realizar predicciones fiables de desplazamientos y esfuerzos haciendo uso de cálculos por elementos finitos. El análisis de estas estructuras se puede llevar a cabo por elementos finitos sólidos, pero tiene un alto costo computacional. Los elementos de superficie (elementos 2D) son una alternativa para obtener resultados precisos a un costo computacional razonable.

En este trabajo se desarrolla un modelo matemático para cascarones homogéneos moderadamente gruesos a partir de aproximaciones sobre los campos de desplazamientos y esfuerzos.

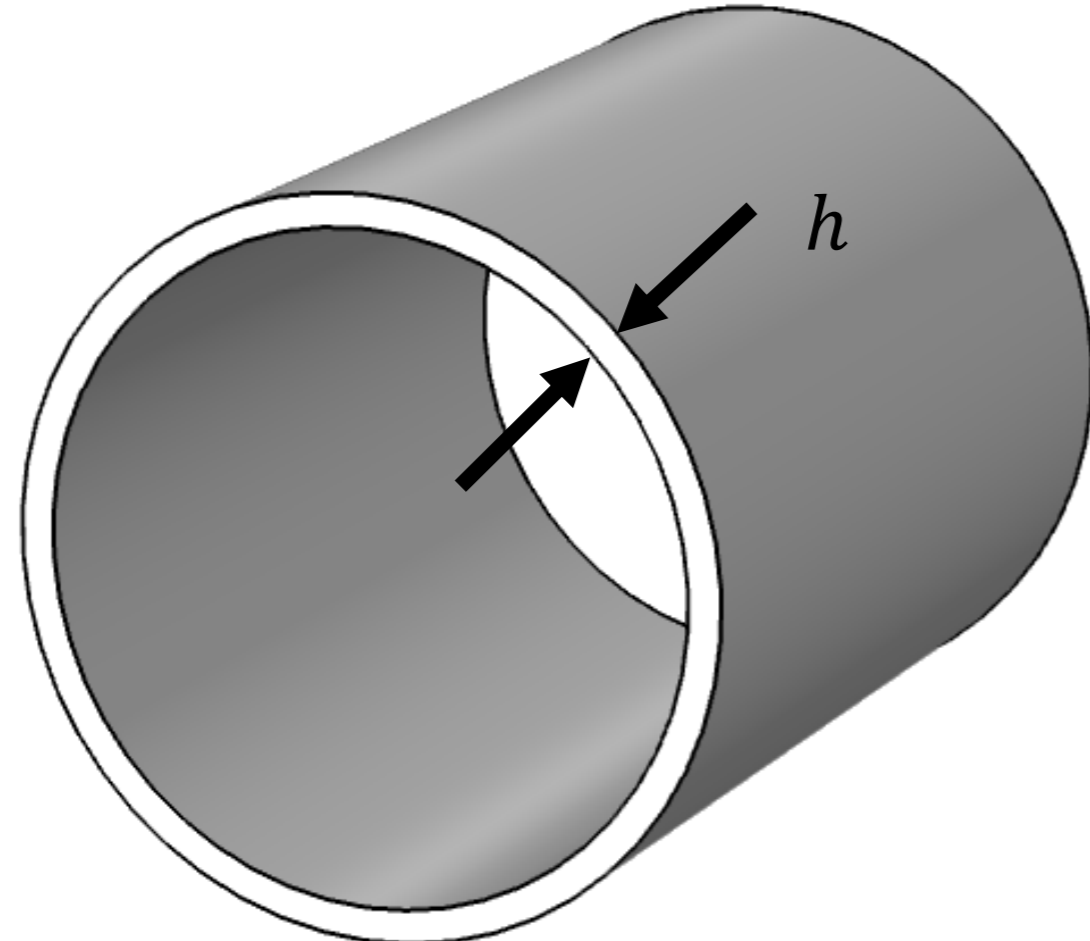


Fig. 1. Estructura tipo cascarón.

Aproximaciones de los campos de esfuerzos y desplazamientos.

Las aproximaciones se escriben en función de coeficientes que multiplican a polinomios de la coordenada del espesor del cascarón ξ_3 . El campo de esfuerzos es aproximado de la siguiente forma:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \sum_{n=0}^1 \sigma_{\alpha\beta}^n(\xi_1, \xi_2, t) P_n(\xi_3) \quad \forall \alpha, \beta \in [1,2]$$

$$\sigma_{\alpha 3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \sum_{n=0}^3 \sigma_{\alpha 3}^n(\xi_1, \xi_2, t) P_n(\xi_3) \quad \forall \alpha, \beta \in [1,2]$$

$$\sigma_{33}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \sum_{n=0}^4 \sigma_{33}^n(\xi_1, \xi_2, t) P_n(\xi_3)$$

la cual cumple con la ecuación de equilibrio 3D $\text{div} \sigma + f = \rho \ddot{u}$. Se escribe el campo de desplazamientos 3D u como:

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \begin{pmatrix} U_1(\xi_1, \xi_2, t) * P_0(\xi_3) + h\phi_1(\xi_1, \xi_2, t)P_1(\xi_3) \\ U_2(\xi_1, \xi_2, t) * P_0(\xi_3) + h\phi_2(\xi_1, \xi_2, t)P_1(\xi_3) \\ U_3(\xi_1, \xi_2, t) * P_0(\xi_3) \end{pmatrix}$$

donde U_1, U_2 y U_3 son desplazamientos en dirección de ξ_1, ξ_2 y ξ_3 , respectivamente. ϕ_1 es la rotación en dirección 1 y ϕ_2 es la rotación en dirección 2.

Fuerzas generalizadas.

Los coeficientes de la aproximación de esfuerzos se pueden expresar en función de las fuerzas generalizadas:

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} (1 + \kappa_{3-\beta}\xi_3) d\xi_3, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} (1 + \kappa_{3-\beta}\xi_3) \xi_3 d\xi_3 \quad y$$

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} (1 + \kappa_{3-\alpha}\xi_3) d\xi_3,$$

y los esfuerzos en las caras:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1^+ &= \sigma_{13}(\xi_1, \xi_2, h/2, t) \\ \tau_2^+ &= \sigma_{23}(\xi_1, \xi_2, h/2, t) \\ \sigma^+ &= \sigma_{33}(\xi_1, \xi_2, h/2, t) \end{aligned} \right\} \text{Cara exterior.}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1^- &= \sigma_{13}(\xi_1, \xi_2, -h/2, t) \\ \tau_2^- &= \sigma_{23}(\xi_1, \xi_2, -h/2, t) \\ \sigma^- &= \sigma_{33}(\xi_1, \xi_2, -h/2, t) \end{aligned} \right\} \text{Cara interior.}$$

Ecuaciones de movimiento.

Las aproximaciones de los campos se introducen en las ecuaciones de Euler-Lagrange lo que conduce a las ecuaciones de movimiento:

$$\overline{\text{div}} \bar{N} + \bar{\kappa} \cdot \bar{Q} + \frac{h}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)(\bar{\tau}^+ - \bar{\tau}^-) + \bar{\tau}^+ - \bar{\tau}^- + h\bar{f} = \rho h \ddot{U} + \frac{\rho h^3(\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \ddot{\bar{\phi}}$$

$$\overline{\text{div}} \bar{M} - \bar{Q} + \frac{h^2}{4}(\kappa_1 + \kappa_2)(\bar{\tau}^+ + \bar{\tau}^-) + \frac{h}{2}(\bar{\tau}^+ - \bar{\tau}^-) + \frac{h^3(\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \bar{f} = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\bar{\phi}} + \frac{\rho h^3(\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \ddot{U}$$

$$\text{div} \bar{Q} + \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} h(\kappa_1 + \kappa_2) + \sigma^+ + \sigma^- - N_{11}\kappa_1 - N_{22}\kappa_2 + hf_3 = \rho h \ddot{U}_3$$

los dobles puntos (") indican segunda derivada temporal, los vectores y matrices son:

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\tau}^+ = \begin{pmatrix} \tau_1^+ \\ \tau_2^+ \end{pmatrix}, \quad \bar{\tau}^- = \begin{pmatrix} \tau_1^- \\ \tau_2^- \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

f_1, f_2 y f_3 son fuerzas volumétricas en direcciones 1, 2 y 3, respectivamente.

Deformaciones y ecuaciones de comportamiento generalizadas.

$$\bar{\epsilon} = \overline{\text{grad}} \bar{U} + \bar{\kappa} U_3, \quad \bar{\chi} = \overline{\text{grad}} \bar{\phi} \quad y \quad \bar{d} = \overline{\text{grad}} U_3$$

donde

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales del cascarón. Las ecuaciones de Euler-Lagrange también llevan a las ecuaciones de comportamiento:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \\ \chi_{11} \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ N_{21} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ M_{11} \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^+ & 0 \\ 0 & L^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^+ \\ \tau_1^+ \\ \tau_2^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^- & 0 \\ 0 & L^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^- \\ \tau_1^- \\ \tau_2^- \end{pmatrix}$$

$A, B, C, D, F, k^+, k^-, L^+, L^-$ son matrices y vectores de rigideces.

Validación y resultados.

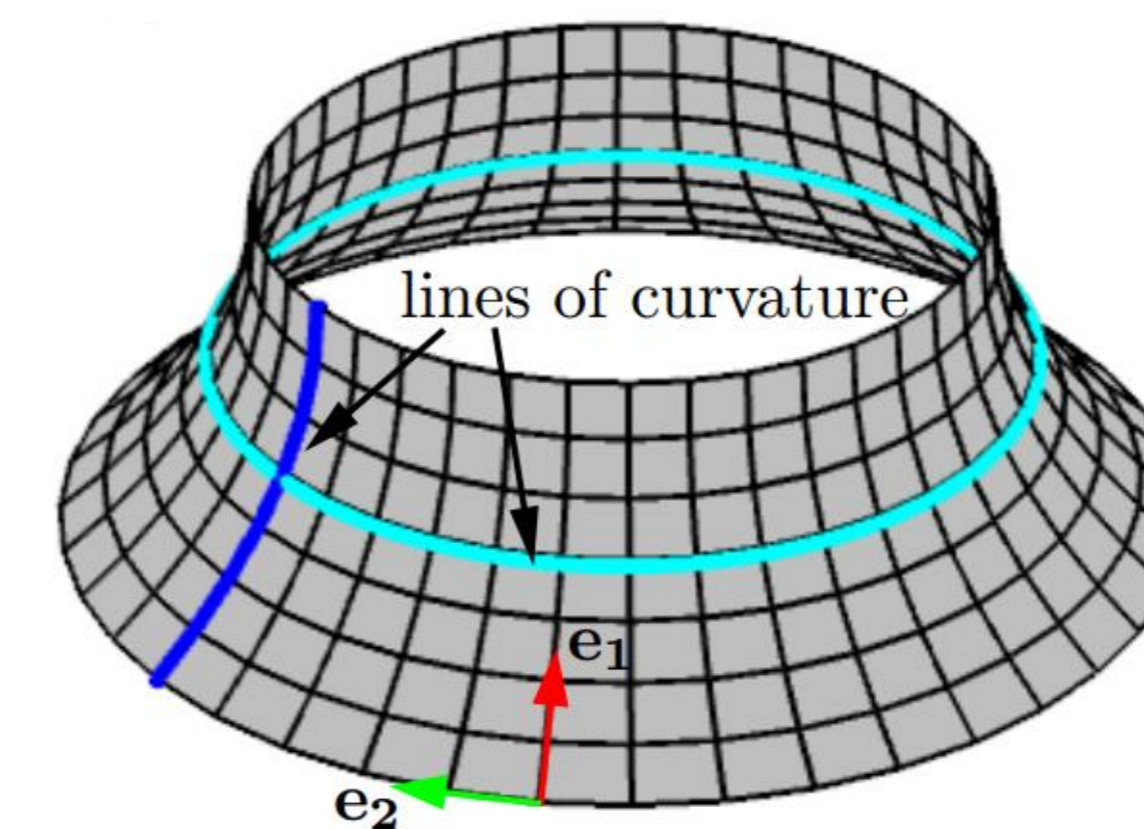


Fig. 2. Geometría catenoidal.

Para la validación se utiliza el software de elemento finito COMSOL y se comparan los resultados del modelo SAM-H con aquellos de otras técnicas, como lo son: la teoría Clásica de Cascarones (CS), la técnica Mixed Intepolation Tensorial Components (MITC6) y Elementos Finitos Sólidos (SFE). Un problema elegido es el de una geometría catenoidal (fig. 2). Para esta misma geometría se realizan dos diferentes estudios.

1) Estudio de frecuencias naturales.

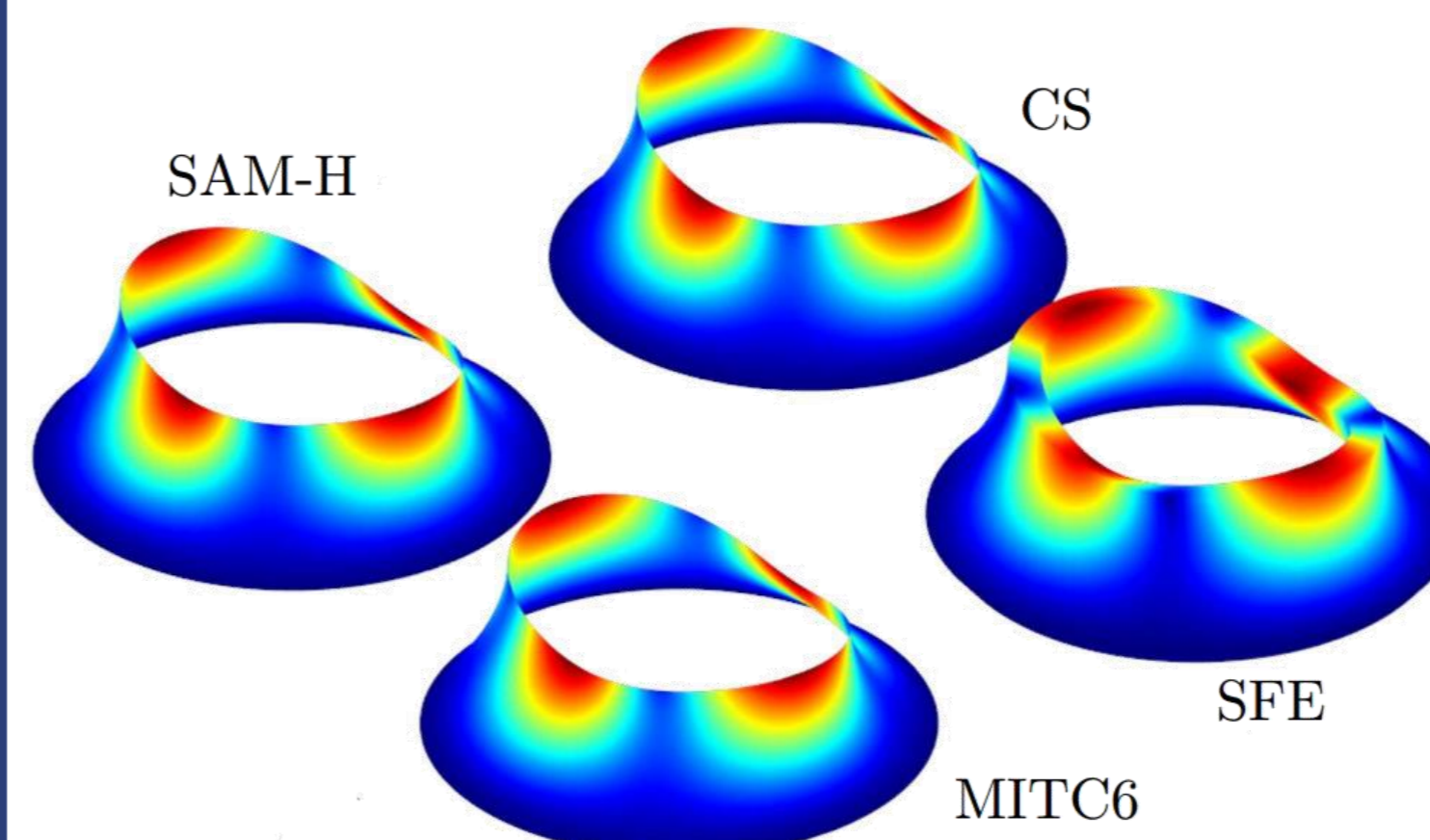


Fig. 3. Modo de vibración 1.

Modo	SFE	SAM-H	CS	MITC6
1,2	119.6	118.48	119.77	118.71
3,4	122.98	121.77	122.82	122.82
5	141.84	140.09	142.38	142.67
6,7	154.23	152.43	154.47	151.26
8	198.17	196.62	196.06	196.68
9,10	198.32	196.36	196.60	191.72

Tab.1. Frecuencias en Hz asociadas a los primeros 10 modos de vibración.

2) Estudio de dominio de la frecuencia con presión interna.

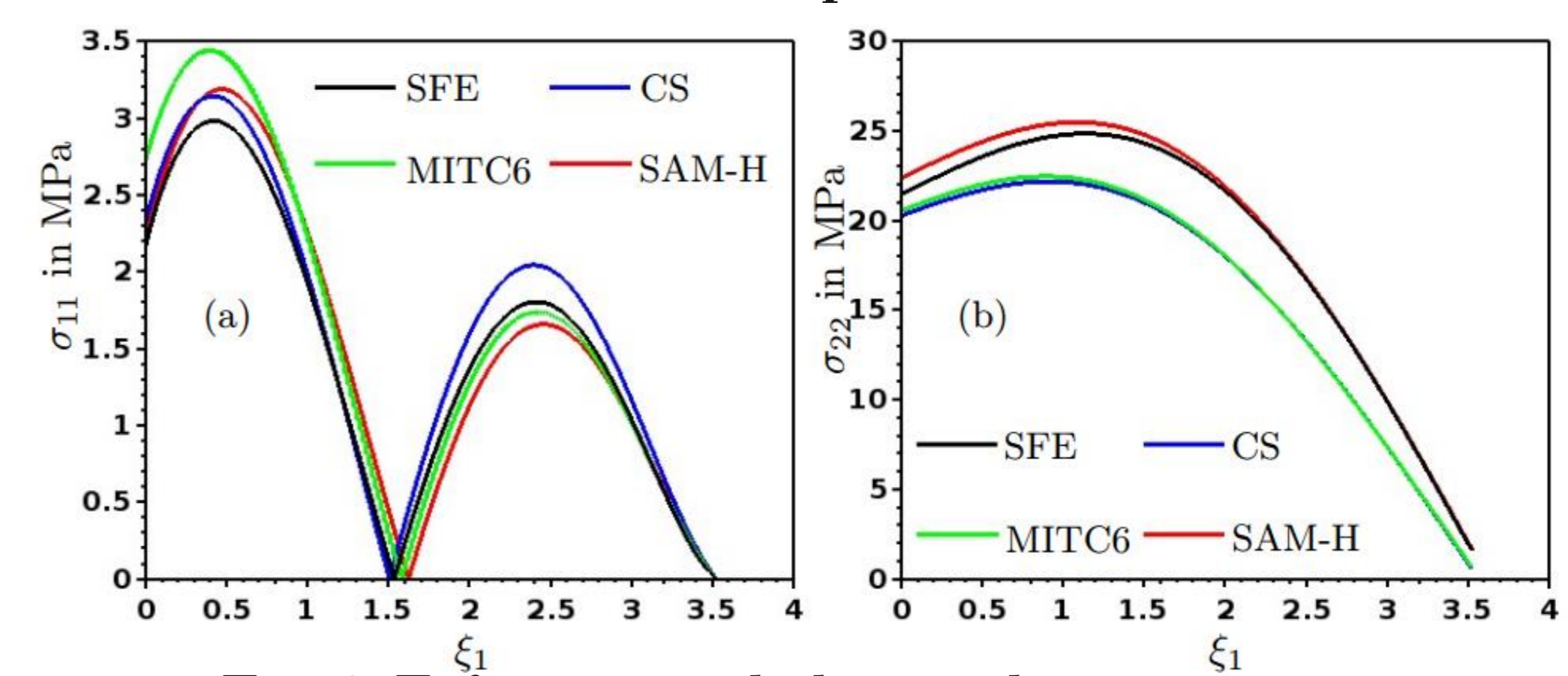


Fig. 4. Esfuerzos en el plano en la cara exterior.

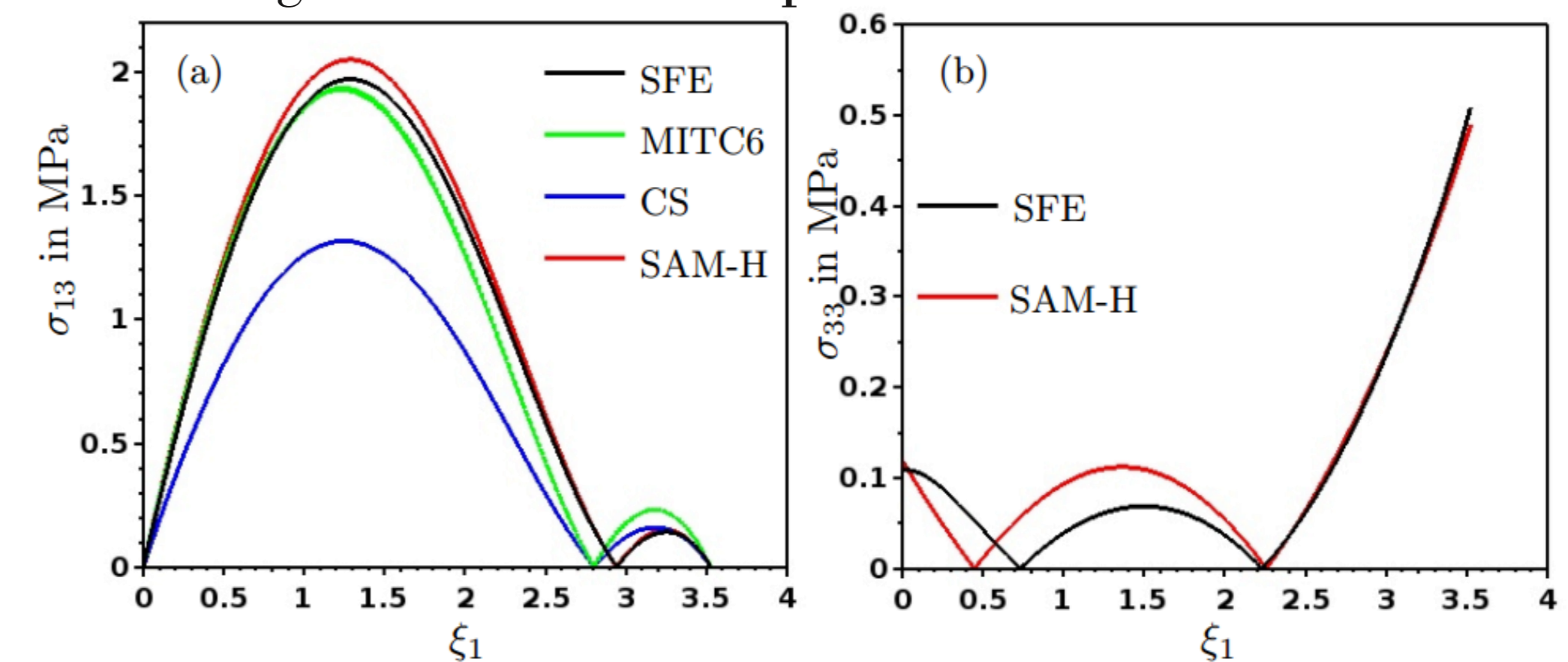


Fig. 5. Esfuerzos fuera del plano en la superficie media.

Conclusiones.

Se construyó un modelo que realiza buenas predicciones sobre el campo de esfuerzos a los que estará sometido un cascarón. Se puede decir que la precisión del modelo SAM-H es mejor que las técnicas CS y MITC6. Las ventajas que presenta el modelo son:

- Cumple con las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera 3D.
- Toma en cuenta y distingue el efecto de aplicar fuerzas en las caras del cascarón.
- Toma en cuenta el efecto de Poisson.
- No se desprecia el esfuerzo normal fuera del plano σ_{33} .

Por la excelente calidad de la aproximación de esfuerzos, el modelo SAM-H está siendo extendido para materiales compuestos laminados y funcionalmente graduados.