



Centro de Investigación en
Materiales Avanzados, S.C.

Desarrollo de modelos matemáticos para cascarones homogéneos y laminados.

Tesis de Doctorado.

Doctorado en Ciencia de Materiales.

Centro de Investigación en Materiales Avanzados S.C.

Presenta:

Axel Fernando Domínguez Alvarado.

Director de tesis:

Dr. Alberto Díaz Díaz

Fecha de examen:

17 de Diciembre 2019

Agradecimientos.

Al Consejo nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada durante mis estudios de posgrado.

Al Centro de Investigación en materiales Avanzados S.C. (CIMAV) por la oportunidad de estudiar el doctorado y las licencias de software que me facilitaron.

A mis profesores en CIMAV por todos los conocimientos que me transmitieron y su apoyo siempre que lo requerí.

A mi director de tesis el Dr. Alberto Díaz Díaz por darme la oportunidad de realizar esta investigación, por todas sus enseñanzas y por su tiempo invertido en ayudarme cuando era necesario.

A mis compañeros de CIMAV por auxiliarme cuando lo requerí y por su amistad.

A mi familia por su amor y su apoyo incondicional en mi decisión de estudiar el doctorado.

Resumen.

En este trabajo, se desarrollan modelos matemáticos para cascarones homogéneos y laminados moderadamente gruesos. Al modelo para cascarones homogéneos se le denomina SAM-H y al de laminados SAM-L. Ambos modelos se crean a partir de una aproximación sobre el campo de esfuerzos. La aplicación del teorema de Reissner proporciona las ecuaciones generalizadas estáticas de los modelos. Términos dinámicos son introducidos después a las ecuaciones de ambos modelos utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange. Se realiza una validación analítica de los modelos, considerando casos estáticos y dinámicos, comparando sus soluciones analíticas con aquellas obtenidas por el modelo clásico de cascarones (CS) y las ecuaciones 3D de la mecánica. Los modelos presentan soluciones más cercanas a las obtenidas por las ecuaciones 3D que el modelo CS, además de presentar una excelente precisión en el cálculo de los campos de esfuerzos y desplazamientos para cascarones moderadamente gruesos. Para realizar una validación numérica, ambos modelos son implementados en el software de elementos finitos COMSOL Multiphysics 5.3a así como también el modelo CS. La precisión de las soluciones numéricas de los modelos es probada comparándolas con aquellas obtenidas por CS, elementos MITC (Mixed Interpolation Tensorial Componentes) y elementos finitos sólidos; estas dos últimas están disponibles en el software mencionado. Los modelos SAM-H y SAM-L presentan resultados más cercanos a los de SFE en el cálculo desplazamientos y esfuerzos que las teorías CS y MITC. Los modelos desarrollados en este trabajo resultan ser una gran herramienta para el análisis estructural de cascarones moderadamente gruesos, ya sea éste de tipo estático o de tipo dinámico.

Índice general

Agradecimientos.	III
Resumen.	v
Índice de figuras	XI
Introducción.	1
1. Marco teórico.	3
1.1. Mecánica del medio continuo.	3
1.2. Materiales compuestos laminados.	4
1.3. Coordenadas curvilíneas	8
1.4. Geometría de un cascarón.	13
1.5. Euler-Lagrange y funcional HR.	15
2. Antecedentes.	19
2.1. Modelos de placas homogéneas.	19
2.2. Modelos de placas laminadas.	22
2.3. Modelos de cascarones.	26
3. Objetivos, hipótesis y justificación.	31
4. Metodología.	33
4.1. Desarrollo de modelos para cascarones.	33
4.2. Validación.	35

4.2.1. Ecuación genérica en COMSOL Multiphysics e implementación de modelos para cascarones.	36
5. Modelo para cascarones homogéneos.	39
5.1. Aproximación de esfuerzos.	41
5.2. Desplazamientos y ecuaciones de equilibrio.	50
5.3. Deformaciones y ecuaciones constitutivas.	55
5.4. Inclusión de términos dinámicos.	63
5.5. Resumen de ecuaciones.	68
6. Modelo para cascarones laminados.	69
6.1. Cascarones laminados.	71
6.2. Aproximación de esfuerzos y desplazamientos.	74
6.3. Fuerzas generalizadas.	75
6.4. Ecuaciones de equilibrio.	77
6.5. Deformaciones y ecuaciones constitutivas.	80
6.6. Resumen de ecuaciones.	92
7. Validación, resultados y discusión.	95
7.1. Resultados analíticos SAM-H.	95
7.1.1. Estudio estático.	96
7.1.2. Estudio dinámico.	99
7.2. Resultados analíticos SAM-L.	103
7.2.1. Estudio estático.	103
7.2.2. Estudio dinámico.	108
7.3. Resultados numéricos del modelo SAM-H.	109
7.3.1. Estudio estático.	109
7.3.2. Estudio dinámico.	113
7.4. Resultados numéricos del modelo SAM-L.	117
7.4.1. Estudio estático.	119

7.4.2. Estudio dinámico.	123
Conclusiones.	125
Anexo.	129
Referencias.	135

Índice de figuras

1.	Materiales que componen el fuselaje de un avión [1].	2
1.1.	Configuraciones del medio continuo [2].	4
1.2.	Curvas esfuerzo-deformación de la fibra, la matriz y el material compuesto conformado por las mismas [3].	5
1.3.	Tipos de materiales compuestos fibro-reforzados [4].	6
1.4.	Posible configuración de un laminado [4].	7
1.5.	Modos básicos de delaminación [5].	8
1.6.	Superficie media y base del sistema local de un cascarón.	14
1.7.	Superficie exterior e interior de un cascarón.	14
1.8.	Ejemplo de un cuerpo con diferentes regiones de condiciones de frontera.	17
2.1.	Sistema de ejes en placas.	20
2.2.	Tipos de teorías para laminados [6].	22
2.3.	Esquema de un laminado [7].	23
2.4.	Familia de elementos MITCn [8].	29
6.1.	Corte transversal en dirección ξ_α del cascarón laminado.	73
7.1.	Error relativo del desplazamiento vs relación $\eta = \frac{h}{R}$ para los modelos SAM-H (a) y CS (b).	98
7.2.	Error relativo del desplazamiento vs relación radio a espesor del modelo SAM-H sin tomar en cuenta la energía w_e^c	98

7.3. Esfuerzos SAM-H y 3D normal normalizado vs $\frac{\sigma_{33}}{p}$ vs posición adimensional $\bar{\xi}_3$	99
7.4. Error relativo δf_1 vs relación de espesor a radio (a) y factor de corrección vs relación de espesor a radio (b).	100
7.5. Amplitud de desplazamiento vs frecuencia de excitación (a); amplitudes de esfuerzos σ_{11} y σ_{33} vs frecuencia de excitación (b). Resultados CS, SAM-H y SFE.	102
7.6. Amplitud σ_{33} vs ξ_3 (resultados SAM-H y SFE results).	102
7.7. Esfera presurizada modelada como un laminado de dos capas homogéneas.	103
7.8. Errores relativos del desplazamiento radial vs relación radio a espesor η para tres valores de ν	105
7.9. Esfuerzo normal radial normalizado en la esfera vs la posición normalizada $\bar{\xi}_3$; $\eta = 0.5$ y $\nu = 0.3$	107
7.10. Error relativo del esfuerzo normal radial contra la relación radio/espesor de SAM-H y SAM-L.	107
7.11. Amplitud del desplazamiento radial normalizado contra coordenada radial normalizada para los modos 3 (a) y 6 (b).	109
7.12. Constricción de un cilindro hueco grueso: modelado usando elementos finitos sólidos (a) y malla para modelos de cascarones. (b).	111
7.13. Esfuerzo cortante σ_{rz} (en MPa) en la sección transversal del cilindro (resultados SFE, SAM-H, CS y MITC6).	111
7.14. Esfuerzo normal σ_{rr} (en MPa) en la sección transversal del cilindro (resultados SFE, SAM-H, CS y MITC6).	112
7.15. Esfuerzo de von Mises (en MPa) en la sección transversal del cilindro (resultados SFE, SAM-H, CS y MITC6).	112
7.16. Superficie media del catenoide (a) y ejemplo de un mallado 2D (b).	113
7.17. Convergencia de los modelos SAM-H, CS y MITC6.	115
7.18. Primer modo de vibración predicho por SFE, SAM-H, CS y MITC6.	115
7.19. Curva amplitud del desplazamiento vs frecuencia de excitación predicha por SFE, SAM-H, CS y MITC6.	116

7.20. Curvas σ_{11} vs ξ_1 (a) y σ_{22} vs ξ_1 (b) en la cara externa del cascarón obtenida por SFE, CS, MITC6 and SAM-H. 117

7.21. Curvas σ_{13} vs ξ_1 (a) y σ_{33} vs ξ_1 (b) en la superficie media del cascarón obtenidas por SFE, CS, MITC6 and SAM-H. 118

7.22. Geometría y sistema de coordenadas del cascarón laminado. 118

7.23. Desplazamiento(en m) radial de la capa 1 obtenido por SFE y SAM-L. . . 119

7.24. Desplazamiento (en m) total de la capa 2 obtenido por SFE y SAM-L. . . 119

7.25. Sección transversal en el cilindro laminado. 120

7.26. Esfuerzos en el plano en la sección transversal del cilindro laminado en Pa. 121

7.27. Esfuerzos fuera del plano en la sección transversal del cilindro laminado en Pa. 121

7.28. Esfuerzo de von Mises en en la sección transversal del cilindro laminado en Pa. 122

7.29. Esfuerzo normal σ_{33} normalizado en la interfase del laminado calculado con SFE y SAM-L. 123

7.30. Esfuerzo cortante σ_{23} normalizado en la interfase del laminado calculado con SFE y SAM-L. 123

7.31. Curvas amplitud de desplazamiento radial vs frecuencia de excitación calculadas por SAM-L y SFE en de la interfase ($\xi_2 = 1.5$ m). 124

Introducción.

En la ingeniería, se denomina cascarón a las estructuras con curvatura y que tienen una dimensión despreciable respecto a las otras dos. Los cascarones están presentes en muchas ramas de la ingeniería, como la civil, la aeroespacial, la aeronáutica y la automotriz. En la ingeniería civil, techumbres y domos de claros largos pueden ser un ejemplo de estas estructuras. Además, en años recientes, los cascarones se utilizan en la gran mayoría de diseños arquitectónicos ya que tienen un gran valor estético. El casco de un bote y el fuselaje de un avión también son ejemplos de este tipo de estructuras. Los fuselajes de aviones, carcasas de automóviles entre muchos otros objetos curvos, son fabricados con materiales compuestos. Dentro de los materiales compuestos están los compuestos laminados, los cuales permiten a los diseñadores obtener excelentes propiedades mecánicas específicas. Como se puede apreciar en la figura 1, los cascarones de compuestos laminados ocupan una posición muy importante en la ingeniería de aeroestructuras. El comportamiento de estas estructuras se puede predecir mediante elementos finitos 3D y las ecuaciones de la mecánica de sólidos, pero tiene un alto costo computacional. Esta es una de las razones por las que surge la necesidad de desarrollar herramientas que faciliten esta tarea.

En este trabajo se pretende desarrollar modelos para cascarones homogéneos y laminados moderadamente gruesos a partir de una aproximación de esfuerzos. Los modelos se construyen siguiendo una metodología similar a la adoptada en [9]. Para el desarrollo de los modelos en este trabajo se utilizan el funcional de Hellinger-Reissner [10] y las ecuaciones de Euler-Lagrange [11]. Primero, se desarrollan las versiones estáticas del modelo utilizando el teorema de Reissner [10] y después se incorporan las aceleraciones utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Esta tesis está estructurada en 8 partes o capítulos. En el primer capítulo, se hace una revisión de conceptos teóricos que se deben de aplicar para poder desarrollar los modelos. En el segundo capítulo, se exponen los antecedentes referentes al desarrollo de modelos de cascarones homogéneos y laminados. Luego, la tercera parte, muestra los objetivos del trabajo, la hipótesis adoptada en la investigación y la justificación de esta tesis. En

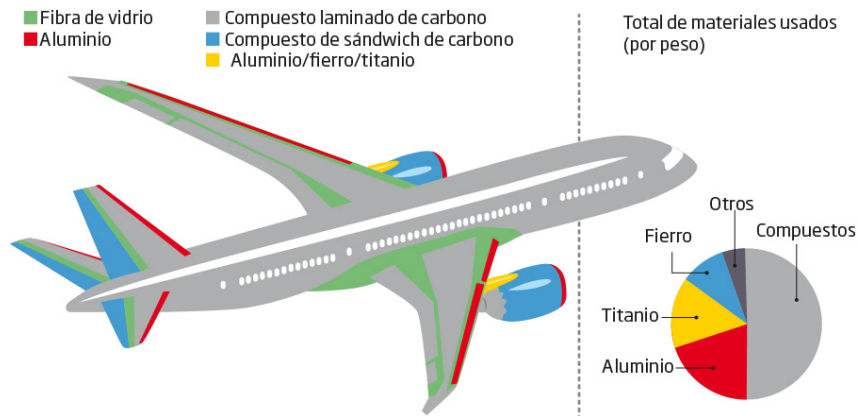


Figura 1: Materiales que componen el fuselaje de un avión [1].

el cuarto capítulo, se explica a detalle la metodología adoptada para el desarrollo de los modelos. Luego, en la quinta parte, se hace el desarrollo del modelo de cascarones homogéneos (modelo SAM-H, Stress Approach Model of Homogeneous Shells). En la parte 6, se aplica la metodología para desarrollar el modelo de cascarones laminados (modelo SAM-L, Stress Approach Model of Laminated Shells). Luego, en el capítulo 7, se muestran resultados analíticos y numéricos de los modelos y se hace una validación de estos confrontando los resultados contra los obtenidos en cálculos de elementos finitos sólidos. Finalmente, se presentan las principales conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Marco teórico.

1.1. Mecánica del medio continuo.

La mecánica del medio continuo es la rama de la física que estudia los esfuerzos y deformaciones en la materia ya sea líquida, sólida o gaseosa [12, 13]. Se entiende como medio continuo a un conjunto infinito de partículas que será estudiado macroscópicamente, es decir, se ignora la estructura molecular de la materia y se considera como un cuerpo sin huecos. Por consiguiente, no existe discontinuidad entre las partículas y la descripción matemática del medio y sus propiedades pueden ser descritas por funciones continuas [14]. Se asume que el medio continuo está compuesto de una infinidad de puntos materiales que ocupan diferentes posiciones espaciales durante su movimiento. La configuración del medio continuo en un cierto tiempo t , está definida por el lugar geométrico ocupado por los puntos materiales en ese instante (figura 1.1).

En el cuerpo, los campos de esfuerzos y desplazamientos se denotan por $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{u} , respectivamente. La configuración del medio en un instante t está dada por:

- Deformaciones. Si se asume que los desplazamientos son imperceptibles respecto a alguna dimensión característica del cuerpo y que las deformaciones son pequeñas (hipótesis de pequeñas perturbaciones), las deformaciones están dadas por el tensor de deformaciones de Green-Cauchy:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}^t \mathbf{u} + \mathbf{grad} \mathbf{u}) \quad (1.1)$$

donde \mathbf{grad} es el operador gradiente, \mathbf{u} es el campo de desplazamientos y el superíndice t indica la transposición.

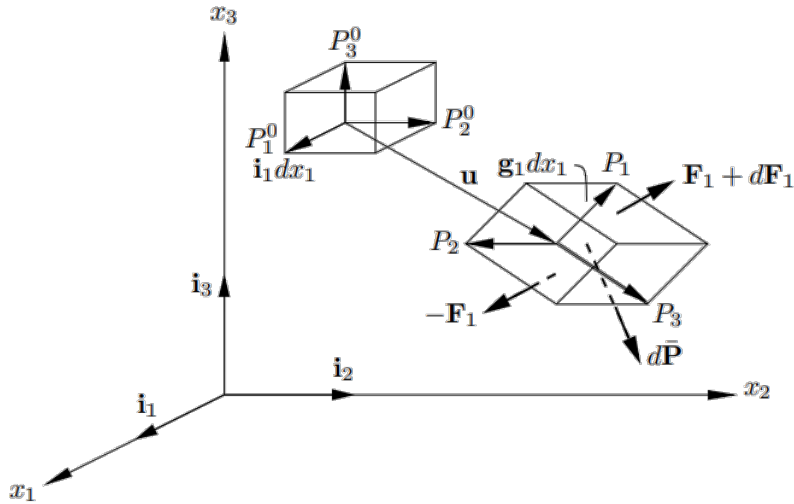


Figura 1.1: Configuraciones del medio continuo [2].

- Ecuaciones de movimiento local, las cuales tienen la forma vectorial

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.2)$$

donde ρ es la densidad del material, \mathbf{f} son las fuerzas volumétricas, \mathbf{div} es el operador divergencia y $\ddot{\mathbf{u}}$ es la segunda derivada temporal del campo de desplazamientos (campo de aceleraciones).

- Ecuaciones de comportamiento, son aquellas que relacionan esfuerzos y deformaciones. Se pueden escribir de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.3)$$

donde \mathbf{S} y \mathbf{C} son tensores de cuarto orden de complianzas y rigideces, respectivamente. Las complianzas y rigideces dependen del material del que está constituido el medio.

1.2. Materiales compuestos laminados.

Los materiales compuestos son aquellos en los que se combinan dos o más materiales en una escala macroscópica para formar un nuevo material con mejores propiedades [3]. Los materiales compuestos presentan las cualidades de sus componentes y a menudo otras propiedades que ninguno de éstos posee. Algunas de las propiedades físicas que se pueden mejorar al formar un material compuesto son la rigidez, la resistencia mecánica, el peso, la

resistencia a la corrosión, las propiedades térmicas, la resistencia a la fatiga y la resistencia al desgaste.

Los materiales compuestos están comúnmente clasificados de la siguiente manera [4]: compuestos fibro-reforzados (figura 1.3), los cuales son conformados de fibras de un material en una matriz de otro; compuestos con partículas, que son formados por partículas de escala macroscópica de un material en una matriz de otro; y los compuestos laminados, estos últimos están hechos de capas de diferentes materiales, incluyendo los compuestos fibro-reforzados y con partículas.

La función de las fibras es brindar rigidez y resistencia al material compuesto como se muestra en la figura 1.2. Una fibra por sí sola no tiene un uso práctico, por lo que se utiliza una matriz para unir un conjunto de fibras. La matriz actúa como un medio de transferencia de carga entre fibras, lo cual provoca que éstas trabajen como un sistema. La idea de utilizar fibras de un material es confinar los defectos y de esta manera contar con una estructura menos sensible a grietas que aquella de un monolito del mismo material. Otra tarea que tiene la matriz es la de proteger a las fibras. Algunos ejemplos de los materiales que se utilizan para las fibras son: aluminio, acero y carbono. Comúnmente, polímeros, metales y cerámicas son utilizados como matriz.

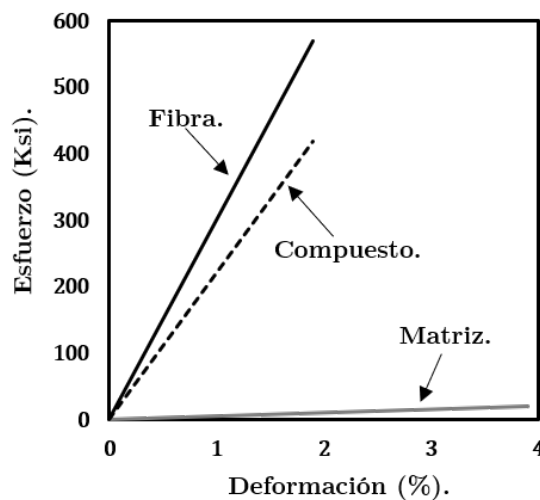


Figura 1.2: Curvas esfuerzo-deformación de la fibra, la matriz y el material compuesto conformado por las mismas [3].

Los compuestos fibro-reforzados uni-direccionalmente tienen un comportamiento mecánico ortótropo. Las propiedades homogeneizadas del material compuesto se determinan de tal forma que sean equivalentes a una mezcla homogénea de sus componentes. La técnica más simple para homogeneizar las propiedades de un compuesto fibro-reforzado unidireccionalmente es la ley de mezclas [15], la cual se basa en las siguientes suposiciones:

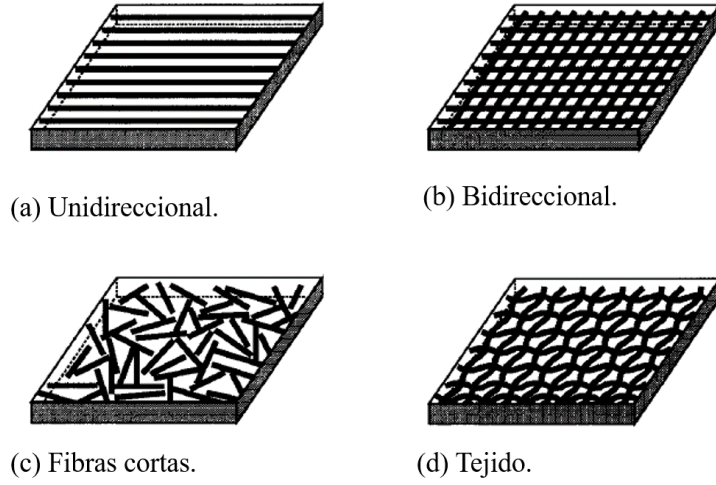


Figura 1.3: Tipos de materiales compuestos fibro-reforzados [4].

- Perfecta adhesión entre fibras y matriz.
- Fibras paralelas y distribuidas uniformemente.
- La matriz no presenta vacíos o micro-grietas.
- Tanto fibras y matriz son materiales isótropos y cumplen la ley de Hooke.
- Las cargas son paralelas o perpendiculares a la dirección de la fibra.

Siguiendo estas suposiciones se pueden expresar las propiedades del compuesto por

$$\begin{aligned}
 E_L &= E_f v_f + E_m v_m, & \nu_{LT} &= \nu_f v_f + \nu_m v_m \\
 E_T &= \frac{E_f E_m}{E_f \nu_f + E_m \nu_m}, & G_{LT} &= \frac{G_f G_m}{G_f \nu_m + G_m \nu_f}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde v_f, E_f, ν_f y G_f son la fracción volumétrica, el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y el módulo cortante de la fibra, respectivamente; v_m, E_m, ν_m y G_m son la fracción volumétrica, el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y el módulo cortante de la matriz, respectivamente; E_L es el módulo de Young del compuesto en dirección de las fibras, E_T es el módulo de Young del compuesto en dirección transversal a las fibras, ν_{LT} es el coeficiente de Poisson longitudinal-transversal del compuesto y G_{LT} es el módulo de cortante transversal-longitudinal del compuesto.

A un apilado de capas de materiales compuestos fibro-reforzados se le denomina material compuesto laminado. La dirección de las fibras de cada capa puede tener un ángulo de

rotación respecto a cierto eje del laminado (figura 1.4). Debido a la diferente orientación de las fibras y propiedades de la capa, el laminado tiene un comportamiento anisótropo. Para cada configuración de un número infinito de posibilidades, se obtienen diferentes propiedades del laminado. Entonces, se puede encontrar una configuración del apilado de tal manera que se obtengan propiedades y espesor del laminado deseados. De ahí viene la ventaja de utilizar los compuestos laminados en el diseño de estructuras. Un inconveniente

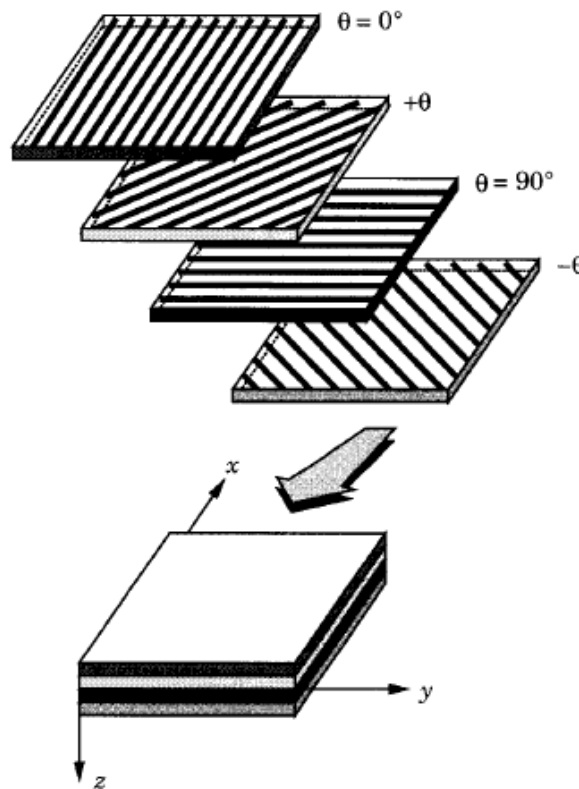


Figura 1.4: Posible configuración de un laminado [4].

niente de los materiales compuestos laminados es que se producen altos esfuerzos en las interfaces (zona de unión entre capas) entre las capas. Esto se debe al cambio brusco en las propiedades del laminado a través del espesor. Los altos esfuerzos producidos en las interfaces pueden causar la falla por delaminación, es decir, la falla en la adhesión de dos capas adyacentes, representando una de las fallas más críticas en los laminados [16]. La delaminación puede desarrollarse como cualquier o una combinación de los tres modos básicos (figura 1.5) de fractura interlaminar. Estos modos son el modo I, el modo de apertura, modo II, el modo de cortante en el plano, y modo III, el modo de cortante fuera del plano.

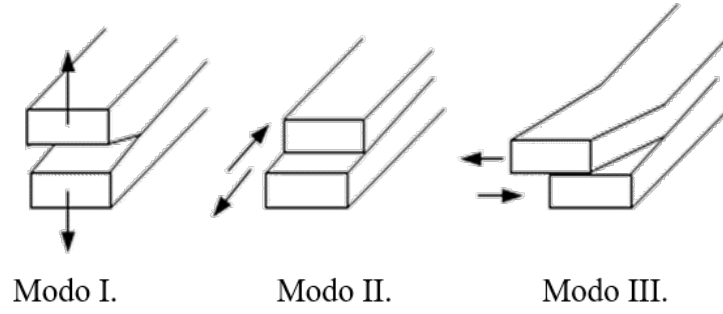


Figura 1.5: Modos básicos de delaminación [5].

1.3. Coordenadas curvilíneas ortogonales y superficies en el espacio 3D.

En un espacio tridimensional, la ubicación de un punto en coordenadas cartesianas (x, y, z) es especificada por un vector de posición \mathbf{R} , el cual tiene la forma

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

En el mismo espacio tridimensional, la posición de cualquier punto se puede especificar utilizando un sistema de coordenadas cualesquiera (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , al que llamaremos coordenadas curvilíneas. Asumiendo que entre las coordenadas x, y, z y ξ_1, ξ_2, ξ_3 existen relaciones tales que

$$\xi_1 = \xi_1(x, y, z), \quad \xi_2 = \xi_2(x, y, z), \quad \xi_3 = \xi_3(x, y, z), \quad (1.6)$$

para la cual existe también una relación inversa

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.7)$$

el vector de posición puede ser expresado como:

$$\mathbf{R}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} x(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ y(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ z(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Por lo tanto, el diferencial del vector de posición es

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_3} d\xi_3. \quad (1.9)$$

Con las definiciones anteriores se puede obtener el diferencial de longitud dS a partir del diferencial $d\mathbf{R}$; el cuadrado del diferencial dS está dado por

$$dS^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_j} d\xi_i d\xi_j. \quad (1.10)$$

Si se define el “tensor métrico” [17] por

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (1.11)$$

se puede reescribir al diferencial de longitud de la siguiente manera:

$$dS^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 G_{ij} d\xi_i d\xi_j, \quad (1.12)$$

donde las cantidades G_{ij} son conocidas como componentes del tensor métrico. Suponiendo que se escogen a ξ_1, ξ_2, ξ_3 de tal forma que sus direcciones asociadas sean ortogonales, se cumple

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_j} d\xi_i d\xi_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j. \quad (1.13)$$

Con la condición anterior, se puede decir que (ξ_1, ξ_2, ξ_3) constituye un *sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales*. En este tipo de sistemas, la expresión del cuadrado del diferencial de longitud se reduce a

$$dS^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 G_{ii} d\xi_i^2, \quad (1.14)$$

donde $G_{ii} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_i}$. La magnitud del vector $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_i}$ está dada por

$$A_i = \sqrt{G_{ii}} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.15)$$

a estas cantidades (A_1, A_2 y A_3) también se les llama “factores de escala”. Por lo tanto, el cuadrado del diferencial de arco puede ser expresado bajo la forma

$$dS^2 = \sum_{i=1}^3 A_i^2 d\xi_i^2. \quad (1.16)$$

Es así que la componente i del vector de longitud $d\mathbf{S}$ es

$$dS_i = A_i d\xi_i, \quad (1.17)$$

y el diferencial de volumen $d\Omega$ es

$$d\Omega = dS_1 dS_2 dS_3 = A_1 A_2 A_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (1.18)$$

La base que define al sistema curvilíneo ortogonal está conformada por los vectores unitarios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, y \mathbf{e}_3 , los cuales son tangenciales a las líneas de curvatura ξ_1, ξ_2 y ξ_3 , respectivamente. Estos vectores unitarios están dados por:

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_i}. \quad (1.19)$$

Evidentemente, la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ es dependiente de la posición. En este contexto, es importante conocer las derivadas de los vectores unitarios respecto a las coordenadas curvilíneas. Estas derivadas tienen las siguientes formas:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi_j} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_j}{\partial \xi_i} \mathbf{e}_j \quad \text{si } j \neq i \quad \text{y} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi_i} = -\frac{1}{A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \xi_j} \mathbf{e}_j - \frac{1}{A_k} \frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} \mathbf{e}_k \quad \text{si } j \neq i \neq k. \quad (1.21)$$

Las geometrías de las superficies en el espacio 3D pueden ser tratadas como un caso especial de coordenadas curvilíneas ortogonales. En este caso, (ξ_1, ξ_2, ξ_3) denotan un sistema curvilíneo ortogonal donde $\xi_3 = 0$ en una superficie de referencia ω . Las coordenadas ξ_1 y ξ_2 son elegidas de tal manera que coinciden con las líneas de curvatura de ω . La base del sistema (ξ_1, ξ_2, ξ_3) está dado por los vectores unitarios \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 . Los vectores \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 son tangenciales a ω , mientras que el vector \mathbf{e}_3 es normal a la superficie de referencia ($\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$). El vector de posición \mathbf{r} de los puntos de la superficie de referencia ω está

dado por

$$\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} x(\xi_1, \xi_2) \\ y(\xi_1, \xi_2) \\ z(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

De tal manera que el vector de posición \mathbf{R} de un punto con coordenadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) puede escribirse como la combinación lineal del vector \mathbf{r} y el vector \mathbf{e}_3

$$\mathbf{R}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \mathbf{e}_3(\xi_1, \xi_2). \quad (1.23)$$

Es así que las factores de escala del sistema (ξ_1, ξ_2, ξ_3) quedan dados como

$$A_1 = a_1 (1 + \kappa_1 \xi_3), \quad A_2 = a_2 (1 + \kappa_2 \xi_3) \quad \text{y} \quad A_3 = 1. \quad (1.24)$$

a_1 y a_2 son factores de escala de la superficie de referencia, y están dados por:

$$a_1 = \sqrt{g_{11}} \quad \text{y} \quad a_2 = \sqrt{g_{22}}; \quad (1.25)$$

donde $g_{11} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}$ y $g_{22} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}$ son las componentes del tensor métrico de ω . Las curvaturas principales de la superficie de referencia se denotan por κ_1 y κ_2 , las cuales se determinan mediante

$$\kappa_1 = -\frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_1^2} \cdot \mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \kappa_2 = -\frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_2^2} \cdot \mathbf{e}_3; \quad (1.26)$$

los radios de curvatura principales de ω son $R_1 = 1/\kappa_1$ y $R_2 = 1/\kappa_2$.

Cuando se trata con coordenadas curvilíneas ortogonales, se tienen:

- diferenciales de arco en cualquier punto (ξ_1, ξ_2, ξ_3) $dS_\alpha = A_\alpha d\xi_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$);
- diferenciales de área transversal a la superficie de referencia $dS_\alpha d\xi_3 = A_\alpha d\xi_\alpha d\xi_3$ ($\alpha = 1, 2, 3$);
- diferencial de volumen $d\Omega = dS_1 dS_2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$;
- diferenciales de arco en la superficie de referencia $ds_\alpha = a_\alpha d\xi_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$);
- diferencial de superficie en la superficie de referencia $d\omega = ds_1 ds_2$.

A su vez, se pueden definir los operadores :

- $\underline{\underline{\text{grad}}}\mathbf{g}$ es el gradiente 2D del vector 2D $\underline{\mathbf{g}} = g_1\mathbf{e}_1 + g_2\mathbf{e}_2$. Sus componentes toman la siguiente forma en arreglo:

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} + \frac{g_2}{a_1 a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} & \frac{1}{a_2} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} - \frac{g_2}{a_1 a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{1}{a_1} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} - \frac{g_1}{a_1 a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} & \frac{1}{a_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_2} + \frac{g_1}{a_1 a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

- $\underline{\text{grad}}p = \frac{1}{a_1} \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{a_2} \frac{\partial p}{\partial \xi_2} \mathbf{e}_2$ es el gradiente 2D de la función escalar 2D p .

- $\underline{\text{div}}\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ es la divergencia del tensor 2D de segundo orden $\underline{\underline{\mathbf{M}}} = M_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ (sumatoria sobre α y β), sus componentes son:

$$\underline{\text{div}}\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \frac{1}{a_1 a_2} \begin{pmatrix} \frac{\partial a_2 M_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_1 M_{12}}{\partial \xi_2} + M_{21} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} - M_{22} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial a_2 M_{21}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_1 M_{22}}{\partial \xi_2} + M_{12} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} - M_{11} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

- La divergencia del campo vectorial 2D $\underline{\mathbf{v}} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ está dado por:

$$\text{div}\underline{\mathbf{v}} = \frac{1}{a_1 a_2} \left(\frac{\partial a_2 v_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_1 v_2}{\partial \xi_2} \right). \quad (1.29)$$

- $\underline{\underline{\text{grad}}}\mathbf{g}$ es el gradiente 2D del vector 2D $\underline{\mathbf{g}} = g_1\mathbf{e}_1 + g_2\mathbf{e}_2$. Sus componentes tienen la siguiente forma:

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} + \frac{g_2}{a_1 a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} & \frac{1}{a_2} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} - \frac{g_2}{a_1 a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{1}{a_1} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} - \frac{g_1}{a_1 a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} & \frac{1}{a_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_2} + \frac{g_1}{a_1 a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}; \quad (1.30)$$

- $\underline{\text{div}}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ indica el operador divergencia 3D aplicado al tensor de segundo orden $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$:

$$\underline{\text{div}}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} (\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2) \quad (1.31)$$

donde los vectores \mathbf{v}^1 y \mathbf{v}^2 toman las formas:

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_2 \sigma_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 \sigma_{12}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1 A_2 \sigma_{13}}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial A_2 \sigma_{21}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 \sigma_{22}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1 A_2 \sigma_{23}}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial A_2 \sigma_{31}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 \sigma_{32}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1 A_2 \sigma_{33}}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

y

$$\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} \frac{A_2}{a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} \sigma_{21} - \frac{A_1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \sigma_{22} + A_2 \frac{a_1}{R_1} \sigma_{31} \\ \frac{A_1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \sigma_{12} - \frac{A_2}{a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} \sigma_{11} + A_1 \frac{a_2}{R_2} \sigma_{32} \\ -A_2 \frac{a_1}{R_1} \sigma_{11} - A_1 \frac{a_2}{R_2} \sigma_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

1.4. Geometría de un cascarón.

Los cascarones son cuerpos curvos donde una de sus dimensiones es despreciable en comparación con las otras dos, a esta dimensión despreciable se le conoce como espesor y se denota por h . El cascarón está delimitado por dos superficies curvas y al lugar geométrico equidistante a estas superficies se le conoce como superficie media ω . La geometría del cascarón es definida enteramente por la forma de la superficie media y el espesor. El sistema local del cascarón (ξ_1, ξ_2, ξ_3) es un sistema curvilíneo ortogonal cuya superficie de referencia es la superficie media del cascarón ω ; ξ_1 y ξ_2 son las líneas de curvatura de la superficie media y ξ_3 es la coordenada en el espesor. La base que define al sistema local del cascarón es \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 (figura 1.6). Dicho lo anterior, las superficies media, exterior e interior son aquellas regiones en el volumen del cascarón donde $\xi_3 = 0$, $\xi_3 = h/2$ y $\xi_3 = -h/2$, respectivamente (véase la figura 1.7). Al producto y al promedio de las curvaturas principales se les conoce como las curvaturas Gaussiana [18] y promedio, respectivamente. Estas curvaturas se denotan por

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \quad \text{y} \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}. \quad (1.34)$$

Los cascarones pueden ser clasificados basados sus curvaturas como sigue:

- Cascarones con curvatura sencilla; estos cascarones tienen una curvatura Gaussiana $K = 0$. Por ejemplo, cilindros circulares y conos.

- Cascarones con curvatura doble y curvatura Gaussiana positiva. Domos circulares, elipsoides y paraboloides de revolución pueden ser asignados a este grupo.
- Cascarones con curvatura doble y curvatura Gaussiana negativa. En esta categoría se pueden encontrar hiperboloides y paraboloides.

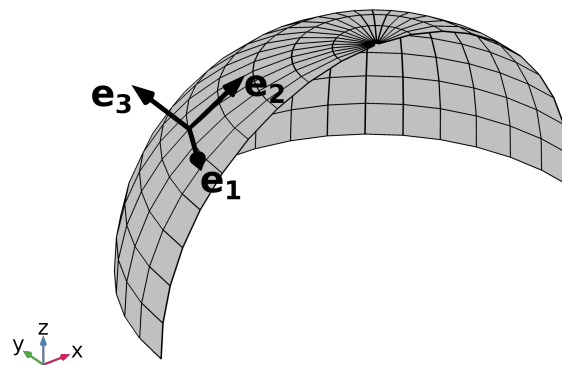


Figura 1.6: Superficie media y base del sistema local de un cascarón.

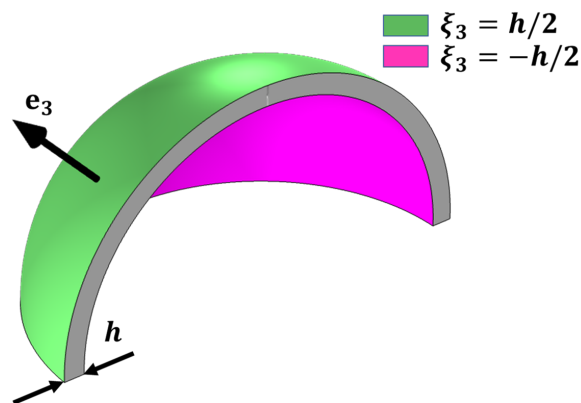


Figura 1.7: Superficie exterior e interior de un cascarón.

Debido a las curvaturas, los cascarones tienen un comportamiento más complejo que las placas planas ya que generalmente su flexión no puede ser separado de su estiramiento. Una placa puede ser tomada como un caso especial de cascarones donde las curvaturas son cero. Otra forma de clasificar a los cascarones se puede dar a partir de la relación espesor/radio $\eta = h/R$, donde R es el menor de los radios de curvatura principales $R_1 = 1/\kappa_1$ y

$R_2 = 1/\kappa_2$. Así, los cascarones se pueden dividir en delgados, moderadamente gruesos y gruesos. Un cascarón es delgado cuando η es despreciable en comparación con la unidad y moderadamente grueso si η^2 es despreciable respecto a la unidad y no η . Con fines de precisión ingenieril, un cascarón puede ser considerado como delgado si se satisface la condición [18]:

$$\text{máx}(\eta) \leq \frac{1}{20}. \quad (1.35)$$

Por lo tanto, cascarones que no cumplen con esta condición caen en la clasificación de moderadamente gruesos a gruesos.

1.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange y funcional de Hellinger-Reissner.

En la mecánica Lagrangiana, la evolución de un sistema es obtenida resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange [11]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} = 0. \quad (1.36)$$

\mathcal{L} es conocido como el Lagrangiano y su expresión es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = K(\dot{\mathbf{q}}_i) - \Pi(\mathbf{q}_i) \quad (1.37)$$

donde \mathbf{q}_i son coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{q}}_i$ son las derivadas respecto al tiempo de las coordenadas generalizadas ($\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t}$), K es la energía cinética y Π es la energía potencial. En este trabajo, Π es considerado como el funcional de Hellinger-Reissner [10], el cual es escrito como:

$$\begin{aligned} HR(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* - w_e^*) d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_{\mathbf{u}}} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{\mathbf{g}}) dS - \int_{\partial\Omega_{\mathbf{s}}} \mathbf{s}^{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{u}^* dS, \end{aligned} \quad (1.38)$$

o haciendo una integración por partes también toma la forma:

$$\begin{aligned} HR(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) &= - \int_{\Omega} (\text{div } \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{u}^* + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* + w_e^*) d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_{\mathbf{u}}} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{g}} dS + \int_{\partial\Omega_{\mathbf{s}}} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} - \mathbf{s}^{\mathbf{g}}) \cdot \mathbf{u}^* dS \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde:

- $\partial\Omega_{\mathbf{s}}$ y $\partial\Omega_{\mathbf{u}}$ representan una región en el cuerpo 3D Ω donde se imponen esfuerzos y desplazamientos, respectivamente (ver figura 1.8)
- cualquier campo con una “estrella” (*) encima indica un campo que no es necesariamente la solución del problema.
- $\boldsymbol{\sigma}^*$ y \mathbf{u}^* denotan el tensor de esfuerzos 3D y el tensor de desplazamientos 3D
- \mathbf{f} es el vector 3D de fuerzas volumétricas, es uniforme a través del espesor y sus componentes en el sistema curvilíneo son f_i .
- $w_e^* = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}^*$ es la energía elástica.
- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)$ es el tensor de deformaciones 3D calculado a partir de las deformaciones.

\mathbf{S} es el tensor 3D de cuarto orden de complianzas, sus componentes son S_{ijkl} . $\mathbf{s}^{\mathbf{g}}$ es el vector de esfuerzos impuesto en $\partial\Omega_s$, $\mathbf{u}^{\mathbf{g}}$ es el vector de desplazamientos impuesto en $\partial\Omega_u$ y \mathbf{n} es el vector normal exterior 3D en las fronteras del cuerpo. Es importante mencionar que $\boldsymbol{\sigma}^*$ y \mathbf{u}^* son tomados como coordenadas generalizadas para el Lagrangiano \mathcal{L} . La energía cinética es función del campo de velocidades $\dot{\mathbf{u}}$ y su expresión es

$$K(\dot{\mathbf{u}}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^* \cdot \dot{\mathbf{u}}^* d\Omega \quad (1.40)$$

donde ρ es la densidad de masa volumétrica y $\dot{\mathbf{u}}^* = \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t}$. Introduciendo las ecuaciones (1.40) y (1.39) en la ecuación (1.37), el Lagrangiano resultante es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \dot{\mathbf{u}}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = K(\dot{\mathbf{u}}^*) - HR(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) \quad (1.41)$$

Usando el Lagrangiano en (1.41), las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.37) llevan a las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{u}}^*} \right) + \frac{\partial HR}{\partial \mathbf{u}^*} = 0, \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial HR}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = 0. \quad (1.43)$$

La pareja \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$ que satisface las ecuaciones (1.42) y (1.43) es la solución del problema mecánico. Esto implica que:

- la ecuación (1.42) produce las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera sobre el vector de esfuerzos;
- la ecuación (1.43) proporciona las ecuaciones constitutivas y las condiciones de borde sobre los desplazamientos.

En el caso de cuerpos estáticos ($\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$), las ecuaciones de Euler-Lagrange se reducen a:

$$\frac{\partial HR}{\partial \mathbf{u}^*} = 0, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial HR}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = 0. \quad (1.45)$$

Las ecuaciones (1.44) y (1.45) son equivalentes al teorema de Reissner [10], el cual establece que :

1. la solución del problema mecánico estático es la pareja \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$ que hace el funcional HR estacionario;
2. la estacionariedad de HR respecto a \mathbf{u}^* produce las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera sobre el vector de esfuerzos;
3. la estacionariedad de HR respecto a $\boldsymbol{\sigma}^*$ resulta en las ecuaciones constitutivas y las condiciones de frontera sobre el campo de desplazamientos.

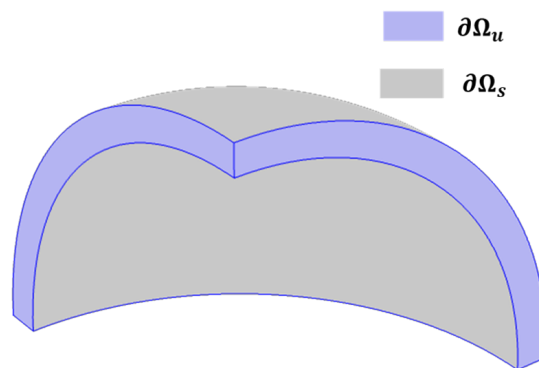


Figura 1.8: Ejemplo de un cuerpo con diferentes regiones de condiciones de frontera.

Capítulo 2

Antecedentes.

Desde hace ya varios años, se han buscado formas de reducir el problema mecánico 3D de estructuras delgadas a un problema 2D. En la actualidad, existen gran cantidad de modelos matemáticos que logran dicha simplificación para placas y cascarones. Los modelos son construidos a partir de una aproximación del campo de desplazamientos o esfuerzos. Estos campos se escriben como combinaciones lineales de polinomios dependientes de la coordenada del espesor. En [19, 20], Leissa hace una recopilación y un estudio comparativo de una gran cantidad de teorías para placas y cascarones. En el trabajo realizado por Leissa, todos los modelos para cascarones están basados en una aproximación sobre el campo de desplazamientos. Hay pocos modelos creados a partir de una aproximación sobre el campo de esfuerzos a pesar de que tienen ventajas respecto a aquellos basados en una aproximación de desplazamientos.

2.1. Modelos de placas homogéneas.

Una de las teorías más simples para placas, basada en una aproximación sobre el campo de desplazamientos, es la de Kirchhof-Love [21]. En esta teoría, el campo de desplazamientos 3D es aproximado en función de tres desplazamientos y sus derivadas. Estos tres desplazamientos son los desplazamientos en dirección de x , y y z en la superficie media ω de la placa ubicada en $z = 0$ (ver figura 2.1). Los desplazamientos u_1 y u_2 en el plano (x,y) son polinomios de primer grado de la coordenada z del espesor y el desplazamiento fuera del plano u_3 es constante a través del espesor. Esta teoría, también considera que no existe deformación normal fuera del plano e ignora a los esfuerzos cortantes fuera del plano. Usualmente se aplica a cascarones delgados. Una teoría más completa es aquella

propuesta por Mindlin [22], en la que agrega rotaciones a la aproximación en la teoría de Kirchhoff-Love. De tal manera, que la teoría de Mindlin tiene 5 desplazamientos generalizados (3 desplazamientos de la teoría de Kirchhoff-Love más 2 rotaciones), pero sigue considerando una deformación normal fuera del plano igual a cero. Los desplazamientos 3D aproximados por la teoría de Mindlin son:

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = U_1(x, y) + z\Phi_1(x, y) \\ u_2(x, y, z) = U_2(x, y) + z\Phi_2(x, y) \\ u_3(x, y, z) = U_3(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde U_1, U_2, U_3, Φ_1 y Φ_2 son los desplazamientos generalizados. Cabe señalar que Φ_1 y Φ_2 , tienen un significado de rotaciones.

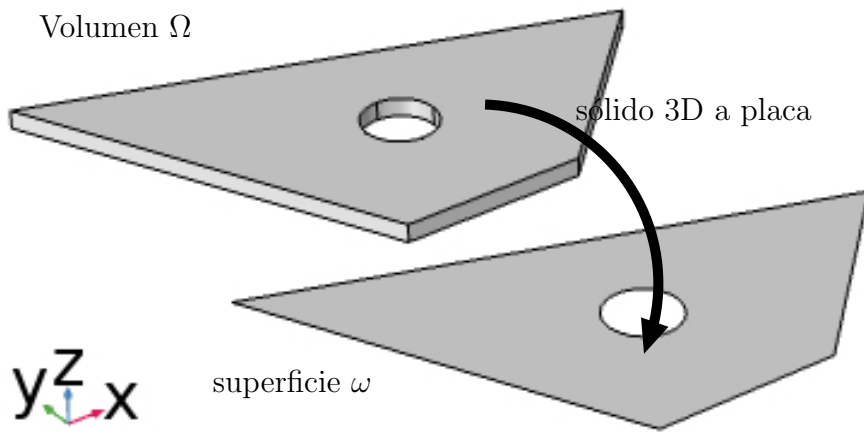


Figura 2.1: Sistema de ejes en placas.

En la teoría de Mindlin, se definen las siguientes fuerzas generalizadas:

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz \\ M_{\alpha\beta}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) z dz \\ Q_{\alpha}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3}(x, y, z) dz \end{cases} \quad (2.2)$$

donde α y β son enteros iguales a 1 o 2, σ es el tensor de esfuerzos, h es el espesor de la placa. $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ y Q_{α} definen las componentes de los tensores de fuerzas de membrana \mathbf{N} , de momentos en el plano \mathbf{M} y de fuerzas cortantes fuera del plano \mathbf{Q} , respectivamente. Estas fuerzas generalizadas son duales energéticas de las siguientes deformaciones

generalizadas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) &= \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{U}(x, y) + \mathbf{grad}^t \mathbf{U}(x, y)) \\ \boldsymbol{\chi}(x, y) &= \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \boldsymbol{\Phi}(x, y) + \mathbf{grad}^t \boldsymbol{\Phi}(x, y)) \\ \mathbf{d}_\Phi(x, y) &= \boldsymbol{\Phi}(x, y) + \mathbf{grad} U_3(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

Las siguientes ecuaciones de equilibrio pueden ser obtenidas con el principio de potencias virtuales:

$$\begin{cases} \mathbf{div} \mathbf{N} + \boldsymbol{\tau}^+ + \boldsymbol{\tau}^- &= \mathbf{0} \\ \mathbf{div} \mathbf{M} - \mathbf{Q} + \frac{h}{2} (\boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^-) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{div} \mathbf{Q} + \sigma^+ + \sigma^- &= 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $\boldsymbol{\tau}^+$ y $\boldsymbol{\tau}^-$ son los vectores esfuerzo cortantes aplicados en las caras superior e inferior de la placa, respectivamente; σ^+ y σ^- son las componentes en z del vector esfuerzo aplicado en las caras superior e inferior de la placa, respectivamente. Mediante principios de equivalencia de energía, se obtienen las ecuaciones de comportamiento del modelo de Mindlin:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) &= \frac{1}{h} \mathbf{S} : \mathbf{N}(x, y) \\ \boldsymbol{\chi}(x, y) &= \frac{12}{h^3} \mathbf{S} : \mathbf{M}(x, y) \\ \mathbf{d}_\Phi(x, y) &= \frac{1}{h} \mathbf{S}_\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}(x, y) \end{cases} \quad (2.5)$$

donde \mathbf{S} y $\mathbf{S}_\mathbf{Q}$ son los tensores de complianzas en el plano y por cortantes fuera del plano, respectivamente. Este modelo resultó ser muy útil por su simplicidad, pero tenía el inconveniente de sobrestimar las rigideces por fuerzas cortantes fuera del plano.

En 1945, Reissner propuso un modelo basado en una aproximación de esfuerzos. Las componentes cortantes fuera del plano y normal fuera del plano del tensor de esfuerzos son aproximadas por polinomios de grado dos y tres, respectivamente. El aporte de Reissner radica en que su aproximación del campo de esfuerzos cumple con las ecuaciones de equilibrio 3D y las condiciones de frontera en las caras de la placa. El modelo de Reissner arrojó las mismas ecuaciones de equilibrio y de comportamiento del modelo de Mindlin, a excepción de la última ecuación de comportamiento, donde obtuvo:

$$\mathbf{d}_\Phi(x, y) = \frac{6}{5h} \mathbf{S}_\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}(x, y). \quad (2.6)$$

En esta ecuación, se prevé una rigidez por cortante fuera del plano igual a $\frac{5}{6}$ la de Mindlin. Esta rigidez resultó ser más precisa que la prevista por Mindlin. Los software comerciales

actuales emplean, en su modelo de placas, al modelo de Mindlin haciendo la debida corrección a la rigidez al cortante fuera del plano.

2.2. Modelos de placas laminadas.

Los modelos de placas de Mindlin y Reissner han sido la base de varias modelaciones de placas laminadas y de modelos de orden superior que utilizan polinomios de mayor grado para la aproximación de desplazamientos y/o esfuerzos. Los modelos más comunes, realizan una aproximación en todo el laminado tratándolo como una capa única equivalente (ESL por sus siglas en inglés) o por capa (LW por sus siglas en inglés) [23]. En las teorías ESL se aproxima el campo de esfuerzos o desplazamientos por polinomios para todo el laminado (figura 2.2a), mientras que las teorías LW aproximan a dichos campos en cada capa del laminado (figura 2.2b). Existen también otro tipo de teorías para laminados como lo son las teorías de orden superior [24], modelos zig-zag [25] o extensiones de la teoría de Reissner-Mindlin [26, 27]. Al estudiar laminados es importante definir el orden de apilamiento, y en base al definir las coordenadas de las superficies inferior, media y exterior de las capas del laminado como se muestra en el esquema 2.3

En [28], Carrera describe una formulación unificada para obtener modelos para laminados. Menciona la importancia de que los campos de esfuerzos y desplazamientos sean C^0 continuos en la dirección del espesor. Cuando se analiza la distribución de esfuerzos y desplazamientos real en un multicapa se observa la discontinuidad de sus primeras derivadas respecto a la dirección del espesor [29]. Muchos investigadores han hecho uso de la formulación unificada de Carrera en el estudio de vigas, placas laminadas, placas “sandwich” y placas funcionalmente graduadas, por ejemplo: análisis de vibraciones libres [30–33] y pandeo [34–37]. El modelo de Pagano [38] es uno modelos dentro de la familia LW que

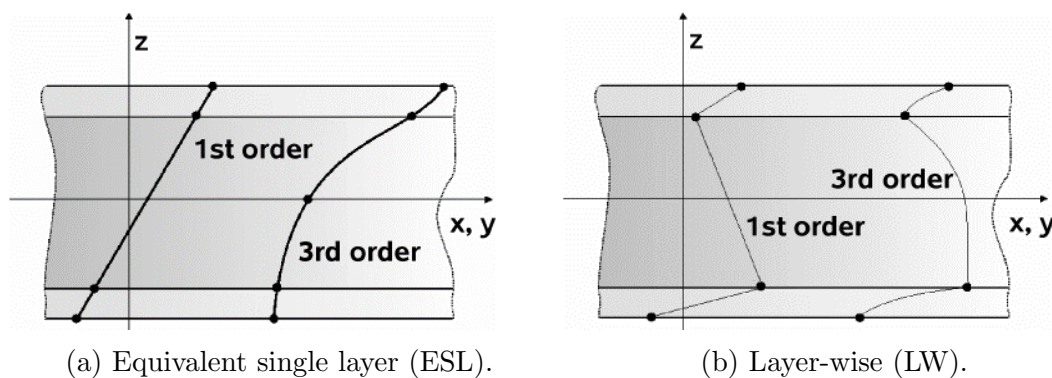


Figura 2.2: Tipos de teorías para laminados [6].

vale la pena destacar. Pagano aplicó el teorema de Reissner [10] con una aproximación del campo de esfuerzos, que cumple con las ecuaciones de equilibrio 3D en cada capa, para obtener las ecuaciones de su modelo. En [39], Chabot desarrolla un modelo para placas laminadas llamado M4-5n siguiendo la metodología de Pagano. La teoría M4-5n ha probado tener una excelente calidad en su aproximación de los esfuerzos. Debido a esto, la teoría M4-5n ha sido aplicada en un gran número de problemas [40–46]. En [47], Caron proponen tres criterios para predecir la falla por la delaminación en laminados basado en la teoría M4-5n. Díaz implementa la teoría M4-5n para evaluar los esfuerzos producidos en uniones con adhesivos en laminados [48]. Un software que utiliza la teoría M4-5N para obtener valores de los esfuerzos de interface en los bordes libres de laminados simétricos es presentado en [49]. En [50], Aquino modifica el modelo M4-5n para calcular la plasticidad interlaminar. Un modelo para pavimentos fracturados es desarrollado a partir del modelo M4-5n es presentado en [51]. El modelo de M4-5n fue mejorado por Alvarez-Lima et al en [9]. En este trabajo, además de la energía debida al esfuerzo fuera del plano, se toma en cuenta la energía debida al acoplamiento entre el esfuerzo normal fuera del plano y los esfuerzos en el plano. Esto significó incluir el efecto Poisson normal-planar que se da cuando se tiene, por ejemplo, una expansión en el plano al aplicar presión en las caras del laminado. Este efecto es despreciado en casi todos los modelos de placas y cascarones y sin embargo, puede afectar considerablemente las predicciones en algunas configuraciones de carga. Las ecuaciones desarrolladas por Alvarez-Lima et al tienen además la capacidad de modelar desplazamientos discontinuos.

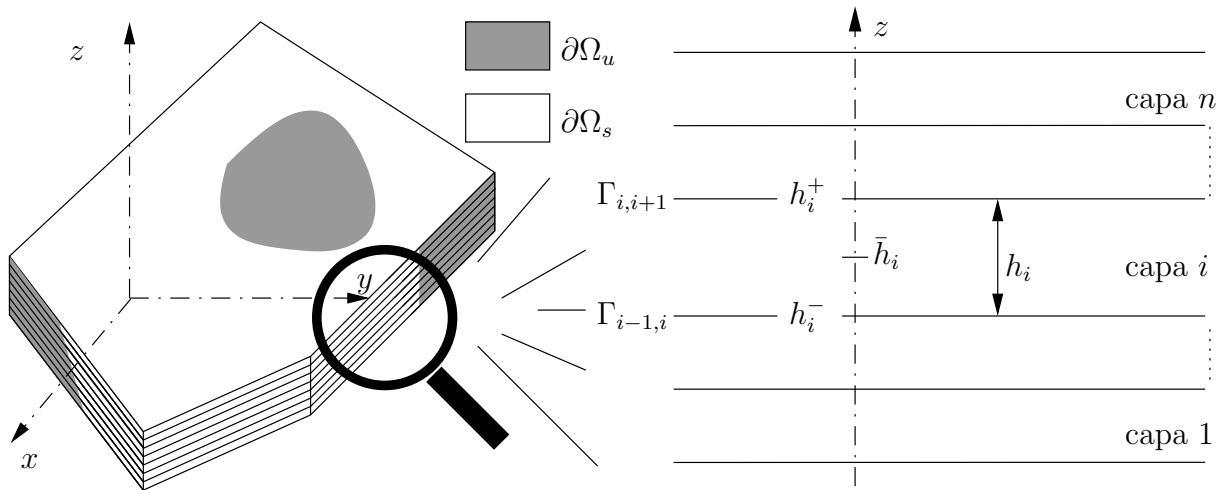


Figura 2.3: Esquema de un laminado [7].

En el modelo M4-5n mejorado, sin tomar en cuenta los términos inelásticos, las fuerzas

generalizadas son las fuerzas de membrana $\underline{\mathbf{N}}^i$ en la capa i , los momentos $\underline{\mathbf{M}}^i$ en la capa i , las cortantes $\underline{\mathbf{Q}}^i$ en la capa i , los esfuerzos cortantes $\underline{\boldsymbol{\tau}}^{j,j+1}$ en la interface de las capas j y $j+1$, el esfuerzo normal $\sigma^{j,j+1}$ en la interface de las capas j y $j+1$. Las fuerzas generalizadas tienen las definiciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz, \\ Q_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz, \\ M_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) (z - \bar{h}_i) dz, \\ \tau_{\alpha}^{j,j+1} = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_j^+), \\ \sigma^{j,j+1} = \sigma_{33}(x, y, h_j^+). \end{array} \right. \quad (2.7)$$

La aproximación de esfuerzos del modelo M4-5n se escribe en términos de las fuerzas generalizadas y después es introducida al funcional Hellinger-Reissner donde se identifican 5 desplazamientos generalizados por cada capa, dos desplazamientos $\underline{\mathbf{U}}^i$ en el plano, un desplazamiento U_3^i fuera del plano y dos rotaciones $\underline{\boldsymbol{\Phi}}^i$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} U_1^i \\ U_2^i \end{pmatrix} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i}{h_i} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} dz \\ U_3^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i}{h_i} u_3 dz \\ \begin{pmatrix} \Phi_1^i \\ \Phi_2^i \end{pmatrix} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12P_1^i}{h_i^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} dz. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Al aplicar la estacionariedad del funcional HR respecto a los desplazamientos generalizados, se obtienen 5 ecuaciones de equilibrio en la capa i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}}^i \underline{\mathbf{N}}^i + \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i \cdot \underline{\mathbf{Q}}^i + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} = \underline{\mathbf{0}} \\ \text{div}^i \underline{\mathbf{Q}}^i + \sigma^{i,i+1} - \sigma^{i-1,i} = 0 \\ \underline{\text{div}}^i \underline{\mathbf{M}}^i - \underline{\mathbf{Q}}^i + \frac{h_i}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i}) = \underline{\mathbf{0}}. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Después, una integración por partes en el funcional permite identificar las deformaciones

generalizadas en la capa i:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^i &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}^{it} \underline{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\underline{\text{grad}}}^i \underline{\underline{\mathbf{U}}}^i \right) \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^i &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}^i \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^i + \underline{\underline{\text{grad}}}^{it} \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^i \right) \\ \underline{\underline{\mathbf{d}}}^i &= \underline{\underline{\text{grad}}}^i U_3^i \end{cases} \quad (2.10)$$

y las deformaciones generalizadas en la interface j,j+1:

$$\begin{cases} D_n^{j,j+1} &= U_3^{j+1} - U_3^j \\ \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{j,j+1} &= \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{j+1} - \underline{\underline{\mathbf{U}}}^j - \frac{1}{2} h_{j+1} \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^{j+1} - \frac{1}{2} h_j \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^j. \end{cases} \quad (2.11)$$

La estacionariedad del funcional respecto a las fuerzas generalizadas arroja las ecuaciones de comportamiento generalizadas en la capa i:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^i &= \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i : \underline{\underline{\mathbf{N}}}^i + \frac{\sigma^{i,i+1} + \sigma^{i-1,i}}{4} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i_c \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^i &= \frac{12}{h_i^3} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i : \underline{\underline{\mathbf{M}}}^i + \frac{3}{5} (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i_c \\ \underline{\underline{\mathbf{d}}}^i &= \frac{6}{5h_i} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i_Q \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^i - \frac{1}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i_Q \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{i,i+1} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{i-1,i}) \end{cases} \quad (2.12)$$

y las ecuaciones de comportamiento en la interface j,j+1:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{j,j+1} &= -\frac{1}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^j_Q \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{j+1} + \frac{2h_{j+1}}{15} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^j_Q \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{j,j+1} - \frac{h_{j+1}}{30} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^j_Q \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{j+1,j+2} \\ &\quad - \frac{1}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^j_Q \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^j + \frac{2h_j}{15} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^j_Q \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{j,j+1} - \frac{h_j}{30} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^j_Q \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{j-1,j} \\ D_n^{j,j+1} &= S_\sigma^{j+1} \left(\frac{13h_{j+1}}{35} \sigma^{j,j+1} + \frac{9h_{j+1}}{70} \sigma^{j+1,j+2} \right) + \frac{1}{4} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{j+1} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^j_c \\ &\quad + S_\sigma^j \left(\frac{13h_j}{35} \sigma^{j,j+1} + \frac{9h_j}{70} \sigma^{j-1,j} \right) + \frac{1}{4} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^j : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^j_c \\ &\quad - \frac{3}{5h_{j+1}} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{j+1} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^j_c + \frac{3}{5h_j} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^j : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^j_c . \end{cases} \quad (2.13)$$

donde $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^i$, $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^i_Q$, $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^i_c$ y S_σ^i son los tensores de complianzas en el plano, por cortantes fuera del plano, por acoplamiento de esfuerzo normal fuera del plano y esfuerzos en el plano y fuera del plano, respectivamente.

2.3. Modelos de cascarones.

Tratemos ahora el caso de los cascarones homogéneos. Los modelos de cascarones pueden ser clasificados dependiendo de la manera en que incorporan en sus ecuaciones la proporción $\eta = \frac{h}{R}$ entre el espesor del cascarón y el menor de los radios de curvatura principales. Los modelos de cascarones delgados desprecian los términos multiplicados por η , mientras que los de moderadamente gruesos desprecian sólo aquellos que sean multiplicados por η^2 . Los modelos de cascarones gruesos consideran términos de orden superior. Los modelos de cascarones delgados más simples son los del tipo de Love [18, 21, 52], los cuales desprecian la deformación transversal angular y están basados en aproximaciones del campo de desplazamientos similares al de la teoría de placas de Kirchhoff-Love. Sanders [52] y Timoshenko [53] son ejemplos de otros autores que desarrollan teorías para cascarones delgados partiendo de una aproximación sobre el campo de desplazamientos. Lur'ye [54], Flügge [55] y Byrne [56], individualmente, obtuvieron las ecuaciones de la teoría de segundo orden para cascarones. Las ecuaciones de estas teorías resultan de aplicar las suposiciones de Kirchhoff directamente en las ecuaciones 3D de elasticidad. Además, los términos del orden η se toman en cuenta en las deformaciones y en las resultantes de los esfuerzos. Sin embargo, las ecuaciones de estas teorías para cascarones son complicadas de manejar. Otros modelos de cascarones delgados y moderadamente gruesos se basan en una aproximación de desplazamientos similar a la de la teoría de placas de Mindlin [57, 58]. Un ejemplo de estos modelos es el de Toorani y Lakis [59], ellos mejoraron su modelo en [60] aumentando la complejidad el campo cinemático de desplazamientos. En todos los modelos de aproximación de desplazamientos mencionados anteriormente, se determina una aproximación de las deformaciones 3D y las ecuaciones constitutivas 3D proporcionan la aproximación de esfuerzos correspondiente, la cual arroja esfuerzos cortantes fuera del plano constantes a través del espesor del cascarón. Cabe resaltar que el campo de esfuerzos obtenido no verifica ni las condiciones de frontera en las caras del cascarón ni las ecuaciones de equilibrio 3D [61]. Además, al igual que con los modelos clásicos de placas, el esfuerzo normal fuera del plano no es evaluado, las deformaciones longitudinales fuera del plano son despreciadas y el efecto Poisson normal-planar es ignorado: todo esto puede conducir a errores considerables, sobre todo cuando se manejan cascarones moderadamente gruesos o gruesos. Es por esto que varios investigadores han buscado desarrollar modelos de orden superior en la aproximación de desplazamientos o utilizar técnicas especiales para reconstruir de una manera más precisa el campo de esfuerzos 3D. En [62, 63], Tornabene y Viola desarrollaron un método para reconstruir con buena precisión los campos de esfuerzos 3D en cascarones de revolución; el campo de

esfuerzos obtenido sí verifica las condiciones de frontera en las caras del cascarón.

En la literatura, se encuentran pocos modelos de cascarones basados en aproximaciones de esfuerzos. Por ejemplo, en [64], Trefftz aproxima a los esfuerzos en el plano en términos de fuerzas generalizadas, pero desprecia los esfuerzos transversales. Por consecuencia, ni las ecuaciones de equilibrio ni las condiciones de frontera 3D se verifican. Reissner también contribuyó en las teorías de cascarones [65]. En su teoría de cascarones se corrigen inconvenientes que presenta aquella de Love. Reissner aplica una aproximación de esfuerzos para obtener ecuaciones constitutivas y ecuaciones de equilibrio directamente de la teoría de elasticidad 3D. En sus cálculos, Reissner desprecia términos del orden ξ_3/R_α , lo que la clasifica como una teoría para cascarones delgados. Otra forma de desarrollar modelos para cascarones es haciendo una aproximación mixta, es decir, sobre ambos campos de desplazamientos y de esfuerzos. Un ejemplo de estas teorías, es la desarrollada por Synge y Chien en [66, 67] para cascarones delgados. Aunque esta teoría cuenta con una aproximación de esfuerzo, no logra cumplir con las condiciones de frontera sobre los esfuerzos en las caras del cascarón. En [68], Fang et al. desarrollaron un modelo de cascarones gruesos haciendo uso de una aproximación mixta y del funcional de Hellinger-Reissner [10]. El modelo obtenido cumple con las condiciones de frontera pero las ecuaciones de equilibrio 3D no fueron satisfechas. Finalmente, Voyiadjis y colaboradores, desarrollaron en [69] y [70] modelos para cascarones cilíndricos y esféricos gruesos, basándose en aproximaciones de esfuerzos complejas. Estos modelos demostraron predecir con precisión los esfuerzos para algunos casos simples de carga; el mayor defecto de los modelos es que no se pueden aplicar en cascarones cualesquiera.

Actualmente, para cascarones moderadamente gruesos y homogéneos, uno de los modelos más utilizados, es el de Reddy desarrollado en [58]. Este modelo será comparado más adelante con el modelo que se desarrollará en esta tesis. De ahora en adelante, nos referiremos a este modelo como el modelo clásico de cascarones (modelo CS: Classic Shell model). En el modelo de Reddy, se aproxima el campo de desplazamientos de forma similar que en la teoría de Mindlin:

$$\begin{cases} u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = U_1(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \Phi_1(\xi_1, \xi_2) \\ u_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = U_2(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \Phi_2(\xi_1, \xi_2) \\ u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = U_3(\xi_1, \xi_2) \end{cases} \quad (2.14)$$

Las deformaciones generalizadas se calculan introduciendo la aproximación de esfuerzos

en el tensor de deformaciones 3D de Green-Cauchy, las cuales son

$$\begin{cases} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\ \underline{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}\ U_3, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}} &= \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\ \underline{\underline{\boldsymbol{\phi}}}, \\ \underline{\underline{\mathbf{d}}} &= \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\ U_3 + \underline{\underline{\boldsymbol{\phi}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Reddy entonces aplica el principio de Hamilton [71, 72] usando la aproximación de desplazamientos para derivar las ecuaciones generalizadas de movimiento de su modelo, las cuales son:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{div}}}\ \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}} + h \underline{\underline{\mathbf{f}}} = \rho h \underline{\underline{\ddot{\mathbf{U}}}} + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho h^3}{12} \underline{\underline{\ddot{\boldsymbol{\phi}}}}, \\ \underline{\underline{\mathbf{div}}}\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}} - \underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + h f_3 = \rho h \underline{\underline{\ddot{U}}}_3 \\ \underline{\underline{\mathbf{div}}}\ \underline{\underline{\mathbf{M}}} - \underline{\underline{\mathbf{Q}}} + \frac{h^3 (\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \underline{\underline{\mathbf{f}}} = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho h^3}{12} \underline{\underline{\ddot{\mathbf{U}}}} + \frac{\rho h^3}{12} \underline{\underline{\ddot{\boldsymbol{\phi}}}}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Reddy toma a las fuerzas generalizadas como las siguientes:

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta} &= \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{\alpha\beta} (1 + \xi_3 \kappa_{\bar{\beta}}) d\xi_3 \\ M_{\alpha\beta} &= \int_{h^-}^{h^+} \xi_3 \sigma_{\alpha\beta} (1 + \xi_3 \kappa_{\bar{\beta}}) \\ Q_\alpha &= \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{\alpha 3} \left(1 + \frac{\xi_3}{R_{\bar{\alpha}}} \right) d\xi_3 \end{cases} \quad (2.17)$$

Las ecuaciones constitutivas de Reddy se pueden escribir de la siguiente forma matricial:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{N}} \\ \widehat{\mathbf{M}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \widehat{\boldsymbol{\chi}} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

donde

$$\widehat{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ N_{21} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ M_{21} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \widehat{\boldsymbol{\chi}} = \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \\ \chi_{21} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \mathbf{L} \underline{\underline{\mathbf{d}}}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Las matrices \mathbf{K} y \mathbf{L} son las matrices de rigideces generalizadas y dependen de las propiedades mecánicas del cascarón.

En cuanto al análisis por elementos finitos se refiere, existe una familia de elementos de superficie para modelar cascarones, esta familia es conocida como Mixed Intepolation Tensorial Components de n nodos (MITC n) [73] (figura 2.4). El modelo MITC6 es muy común y se utiliza en el software comercial COMSOL Multiphysics. La primera formulación Lagrangiana de elementos MITC n fue hecha por Bathe [74, 75], donde interpola la geometría utilizando las coordenadas de la superficie media y las direcciones normales en la superficie media. La idea principal de la formulación MITC n es interpolar el campo de desplazamientos y las deformaciones para después ser acoplados en ciertos puntos [76]. En la actualidad los elementos tipo MITC han sido ampliamente estudiados tanto en sus aspectos teóricos [77–82] como numéricos [83–85]. Se han desarrollado elementos MITC n a partir de una formulación de Reissner para poder aplicarlos a placas y cascarones laminados [86–88], e incluso a placas y cascarones laminados piezoeléctricos [89, 90].

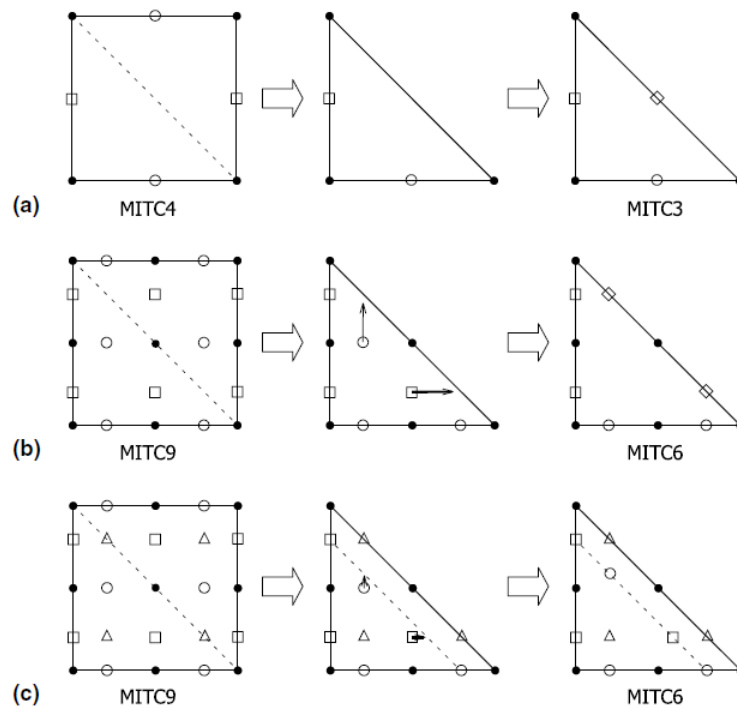


Figura 2.4: Familia de elementos MITC n [8].

Capítulo 3

Objetivos, hipótesis y justificación.

Objetivo general.

El objetivo general de esta tesis es:

Desarrollar modelos matemáticos 2D para cascarones homogéneos y laminados moderadamente gruesos que puedan evaluar de forma precisa el campo de esfuerzos.

Objetivos específicos.

Los objetivos particulares de este trabajo son:

- Escribir las ecuaciones para un cascarón homogéneo basado en la aproximación de esfuerzos.
- Validar estas ecuaciones utilizando el software COMSOL Multiphysics 5.3a.
- Incorporar de forma prudente los términos dinámicos a las ecuaciones del modelo.
- Programar y validar las ecuaciones del modelo de cascarón homogéneo utilizando el software COMSOL Multiphysics 5.3a y confrontando los resultados contra aquellos de modelos comerciales y elementos finitos sólidos.
- Escribir las ecuaciones del modelo de cascarón laminado basado en la metodología LW.

- Validar las ecuaciones del modelo para cascarones laminados utilizando el software COMSOL Multiphysics.

Hipótesis.

Se puede crear un modelo matemático 2D para cascarones laminados que calcule con precisión el campo de esfuerzos, así como el modelo M4-5n lo hace en placas.

Justificación.

Existen varios modelos para predecir el comportamiento de los cascarones; sin embargo, no son lo suficientemente precisos en cuanto a la predicción del campo de esfuerzos, sobre todo cuando se trata de laminados. Esta falta de precisión lleva al sobre dimensionamiento de las estructuras, lo cual puede ser muy costoso en la industria aeroespacial y automotriz. Por lo tanto, se necesitan modelos que tengan la capacidad de evaluar con precisión el campo de esfuerzos.

Capítulo 4

Metodología.

Esta investigación es totalmente teórica, ya que se planteó el objetivo de desarrollar un modelo matemático para cascarones laminados. La investigación se puede dividir en dos etapas: una de desarrollo de los modelos y otra de su validación. Estas etapas se realizaron para cascarones homogéneos y laminados. El caso de cascarones homogéneos se realizó con el fin de adquirir los conocimientos necesarios para el desarrollo del modelo para laminados. En lo que sigue, se dará una descripción más amplia de cada una de las etapas.

4.1. Desarrollo de modelos para cascarones.

Para desarrollar los dos modelos en este trabajo, se tomó como referencia aquel método aplicado por Chabot en [39]. El primer paso en el desarrollo del modelo es aproximar al campo de esfuerzos como combinaciones lineales de polinomios de la coordenada del espesor

$$\sigma_{ij}(\xi_1, \xi_2), \xi_3 = \sum_{n=0}^{m_{ij}} \sigma_{ij}^n(\xi_1, \xi_2) P_n(\xi_3) \quad (4.1)$$

donde m_{ij} es el grado polinomial de la componente ij del campo de esfuerzos. Los polinomios P_n son elegidos de tal forma que sean ortogonales y así facilitar los cálculos. El grado m de cada componente de la aproximación se elige de tal manera que sea posible cumplir con las ecuaciones de equilibrio 3D (esto se mostrará a detalle más adelante). En los modelos de cascarones basados en aproximaciones de esfuerzos se define un campo de fuerzas generalizadas \mathbf{F}^G , las cuales sólo son función de las coordenadas en el plano. En este tipo de modelos, los coeficientes de la aproximación de esfuerzos se pueden escribir en

términos de las fuerzas generalizadas, la densidad de fuerza volumétrica \mathbf{f} y los esfuerzos aplicados en las caras \mathbf{s}^+ y \mathbf{s}^- de la placa de tal forma que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}^{\mathbf{G}}, \mathbf{f}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-, \xi_3) = \sum_{n=0}^{m_{ij}} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij}^n(\mathbf{F}^{\mathbf{G}}, \mathbf{f}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j P_n(\xi_3) \quad (4.2)$$

donde \otimes es el producto tensorial, $\mathbf{e}_i (1 \leq i \leq 3)$ son la base del sistema de coordenadas curvilíneas. Luego, la aproximación sobre el campo de esfuerzos se introduce en el funcional de Hellinger-Reissner [10]. Al hacer esto, se identifica el campo de desplazamientos generalizados $\mathbf{U}^{\mathbf{G}}$ del modelo, el cual surge de forma natural, es decir, que este campo es una consecuencia del método. Habiendo realizado esta tarea, podemos aplicar la estacionariedad al funcional HR respecto al campo $\mathbf{U}^{\mathbf{G}}$, de donde se obtienen las ecuaciones generalizadas de equilibrio y las condiciones de frontera sobre fuerzas generalizadas del modelo:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}^{\mathbf{G}}, \mathbf{f}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}^{\mathbf{G}}, \mathbf{f}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{s}^g, \quad (4.3)$$

respectivamente. Después, se realiza una integración por partes en el término de divergencia del tensor de esfuerzos en dicho funcional, lo que permite identificar las deformaciones generalizadas $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}}(\operatorname{grad} \mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \mathbf{U}^{\mathbf{G}})$ dependientes del campo $\mathbf{U}^{\mathbf{G}}$ y sus derivadas espaciales. Una vez definidas dichas deformaciones, la estacionariedad del funcional HR respecto a las fuerzas generalizadas $\mathbf{F}^{\mathbf{G}}$ permite encontrar las ecuaciones generalizadas de comportamiento mecánico y las condiciones de frontera sobre desplazamientos, las cuales son:

$$\mathbf{F}^{\mathbf{G}}(\operatorname{grad} \mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \mathbf{f}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-) = \mathbf{K}^{\mathbf{G}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}}(\operatorname{grad} \mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \mathbf{U}^{\mathbf{G}}) + \mathbf{K}^+ \mathbf{s}^+ + \mathbf{K}^- \mathbf{s}^- + \mathbf{K}^3 \mathbf{f} \quad \text{y} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{U}^{\mathbf{G}} = \mathbf{g}(\mathbf{u}),$$

donde $\mathbf{K}^{\mathbf{G}}$, \mathbf{K}^+ , \mathbf{K}^- y \mathbf{K}^3 son rigideces generalizadas y $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ es una función del campo de desplazamientos 3D. Con estas relaciones podemos reescribir las ecuaciones de equilibrio generalizadas en función de los desplazamientos generalizados y sus derivadas espaciales bajo la forma:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\operatorname{grad} \mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \mathbf{f}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-) + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (4.5)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones estáticas se procedió a incluir los términos dinámicos con la ayuda de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, para este caso, sí es necesario hacer una aproximación sobre el campo de desplazamientos. Esta aproximación se escribe

en función de los desplazamientos generalizados resultantes de las ecuaciones estáticas

$$\mathbf{u}(\mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \xi_3) = \sum_{n=0}^{m_j} \sum_{j=1}^3 u_j^n(\mathbf{U}^{\mathbf{G}}) \mathbf{e}_j P_n(\xi_3), \quad (4.6)$$

donde m_j es el grado polinomial de la aproximación de la componente j del campo de desplazamientos 3D. Las ecuaciones de Euler-Lagrange agregan aceleraciones a las ecuaciones de equilibrio obtenidas en el caso estático

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{grad} \mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \mathbf{f}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-) + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}(\ddot{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \xi_3) \quad (4.7)$$

Si reescribimos esta ecuación utilizando las expresiones (4.2) y (4.6) obtenemos:

$$\mathbf{div} \left(\sum_{n=0}^{m_{ij}} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij}^n(\mathbf{grad} \mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \mathbf{U}^{\mathbf{G}}, \mathbf{f}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j P_n(\xi_3) \right) + \mathbf{f} = \rho \sum_{n=0}^{m_j} \sum_{j=1}^3 \ddot{u}_j^n(\ddot{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \mathbf{e}_j P_n(\xi_3) \quad (4.8)$$

De esta forma tenemos un equivalente de las ecuaciones en la sección 1.1, donde todos los campos dependen sólo de las coordenadas en el plano y son independientes de ξ_3 .

4.2. Validación.

Después de todo el trabajo de desarrollo de los modelos, todas sus ecuaciones son validadas de forma analítica y numérica. Para la parte analítica, se plantean problemas que tengan una solución sencilla de encontrar, como esferas y cilindros con presión externa o interna. Estos resultados se comparan con los obtenidos por las ecuaciones 3D y el modelo clásico de cascarones, al que nos referiremos como CS de aquí en adelante. Esto con el fin de validar y evaluar la precisión del modelo. Para los resultados numéricos, se eligió el software COMSOL Multiphysics, ya que este software permite modelar cualquier fenómeno físico a partir ecuaciones genéricas que procesa mediante el método de elementos finitos. Tanto los modelos para cascarones desarrollados en este trabajo como el CS son implementados en COMSOL. Este mismo software cuenta con un módulo para resolver problemas mecánicos de cascarones usando elementos tipo MITC6. Es así como los modelos desarrollados en este trabajo son validados y probados comparando sus soluciones con aquellas del modelo CS, elementos finitos MITC6 y también elementos finitos

sólidos. Es importante resaltar que, en este documento, el objetivo no es dar la mejor formulación de elemento finito sino obtener resultados numéricos de los modelos SAM-H y SAM-L para probar su precisión.

4.2.1. Ecuación genérica en COMSOL Multiphysics e implementación de modelos para cascarones.

En COMSOL, para modelos en el espacio 3D, la opción “PDE interfaces” ofrece la posibilidad de considerar ecuaciones diferenciales parciales (PDEs por sus siglas en inglés) de dimensiones más bajas; por ejemplo, superficies en un espacio 3D. Dentro de “PDE interfaces”, la opción “Coefficient Form Boundary PDE” proporciona una interfaz general para especificar y resolver PDEs en forma de coeficientes en el dominio de una superficie. Si se considera un problema dinámico que tiene un campo de solución \mathbf{u}^c con m variables escalares dependientes u_j^c ($1 \leq j \leq m$), se incluyen m ecuaciones diferenciales parciales escalares en la siguiente ecuación vectorial :

$$\mathbf{e}^c \frac{\partial^2 \mathbf{u}^c}{\partial t^2} + \mathbf{d}^c \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial t} + \nabla \cdot (-\mathbf{C}^c \nabla \mathbf{u}^c - \boldsymbol{\alpha}^c \mathbf{u}^c + \boldsymbol{\gamma}^c) + \boldsymbol{\beta}^c \cdot \nabla \mathbf{u}^c + \mathbf{a}^c \mathbf{u}^c = \mathbf{f}^c \quad (4.9)$$

donde ∇ es el operador gradiente en el sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) ; \mathbf{C}^c es una hipermatriz de tamaño $m \times 3 \times 3 \times m$; $\boldsymbol{\alpha}^c$ y $\boldsymbol{\beta}^c$ son hipermatrices de tamaño $m \times 3 \times m$; \mathbf{e}^c , \mathbf{d}^c y \mathbf{a}^c son matrices de tamaño $m \times m$; $\boldsymbol{\gamma}^c$ es un hipervector de $m \times 3$; por último, \mathbf{f}^c es un vector de m componentes. A las hipermatrices, las matrices, los vectores e hipervector anteriores se les puede dar la siguiente interpretación física: las componentes de \mathbf{e}^c son coeficientes de masas, los elementos de \mathbf{d}^c pueden ser coeficientes de masas o amortiguamiento, los coeficientes de difusión están contenidos en \mathbf{C}^c , $\boldsymbol{\alpha}^c$ tiene como elementos a los coeficientes de conservación de flujo de convección, las componentes $\boldsymbol{\beta}^c$ son coeficientes de convección, los elementos de \mathbf{a}^c son coeficientes de absorción, $\boldsymbol{\gamma}^c$ es el campo fuente de flujo y \mathbf{f}^c representa el campo fuente.

Las ecuaciones (4.8) de los modelos son escritas en términos de desplazamientos generalizados que juegan el papel de variables dependientes. Es importante recalcar que en las ecuaciones (4.8) los operadores **div** y **grad** están dados en coordenadas curvilíneas, es así que, para hacer compatible dichas ecuaciones con la ecuación genérica de COMSOL, se deben transformar las derivadas en coordenadas curvilíneas a coordenadas cartesianas. De esta manera, todo se reduce a identificar cómo intervienen las rigideces generalizadas, los esfuerzos en las caras y las fuerzas volumétricas en las matrices, hipermatrices, vectores

e hipervectores descritos anteriormente.

Capítulo 5

Desarrollo de modelo para cascarones homogéneos.

En esta sección, se desarrolla un modelo matemático para cascarones homogéneos utilizando el teorema de Reissner [91]. Primeramente, para problemas estáticos, el modelo es construido a partir de una aproximación del campo de esfuerzos 3D $\boldsymbol{\sigma}$, la cual es propuesta de tal manera que cumpla con las ecuaciones de equilibrio 3D y las condiciones de frontera en las caras del cascarón. Se optó por la aproximación del campo $\boldsymbol{\sigma}$ ya que el objetivo del modelo es predecir de forma precisa a este campo y no poner tanto cuidado en el campo de desplazamientos. Después, se realizan adaptaciones al modelo utilizando la ecuación de Euler-Lagrange [11] para poder extender el modelo para casos dinámicos.

Notación y suposiciones.

En el desarrollo del modelo SAM-H se adopta la siguiente notación:

- Los subíndices griegos ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) toman los valores 1 y 2.
- Los subíndices latinos (i, j, k, l) toman los valores 1, 2 y 3.
- La base del sistema del cascarón está dado por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$; en el sistema cartesiano (x, y, z) , esta base se escribe como: $\mathbf{e}_1 = e_{11}\mathbf{e}_x + e_{12}\mathbf{e}_y + e_{13}\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_2 = e_{21}\mathbf{e}_x + e_{22}\mathbf{e}_y + e_{23}\mathbf{e}_z$.
- Caracteres en negritas denotan vectores, matrices y tensores.
- “.” indica producto punto de vectores y la contracción de tensores mientras la doble

contracción de tensores, y el producto tensorial están representados por “:” y “ \otimes ”, respectivamente.

- Los caracteres en negritas con una única y doble línea debajo (por ejemplo: $\underline{\mathbf{U}}$ y $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$) denotan respectivamente vectores y tensores de segundo orden del espacio 2D definido por la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
- $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} = \kappa_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \kappa_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ y $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} = \kappa_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \kappa_1 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ son tensores de curvatura.
- Los vectores aplicados en las caras exterior ($\xi_3 = \frac{h}{2}$) e interior ($\xi_3 = -\frac{h}{2}$) son \mathbf{s}^+ y \mathbf{s}^- , respectivamente. Estos vectores son definidos por:

$$\begin{cases} \mathbf{s}^+(\xi_1, \xi_2) = \underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \sigma^+ \mathbf{e}_3 & \text{y} & \mathbf{s}^-(\xi_1, \xi_2) = \underline{\boldsymbol{\tau}}^- + \sigma^- \mathbf{e}_3, \\ \text{donde } \underline{\boldsymbol{\tau}}^+ = \tau_1^+ \mathbf{e}_1 + \tau_2^+ \mathbf{e}_2 & \text{y} & \underline{\boldsymbol{\tau}}^- = \tau_1^- \mathbf{e}_1 + \tau_2^- \mathbf{e}_2. \end{cases} \quad (5.1)$$

En la expresión anterior σ^+ y σ^- son los esfuerzos normales aplicados en las caras del cascarón, mientras que τ_α^+ y τ_α^- son los esfuerzos cortantes aplicados en las caras del cascarón.

- \mathbf{f} es el vector 3D de cargas en el cuerpo y sus componentes en el sistema de coordenadas curvilíneas son f_i .
- $\underline{\mathbf{n}}^0 = n_1^0 \mathbf{e}_1 + n_2^0 \mathbf{e}_2$ es el vector normal exterior en el borde de la superficie media del cascarón ω .

Para facilitar los cálculos en el desarrollo del modelo, se hacen las siguientes suposiciones:

1. Se asumen pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos.
2. El material es homogéneo y ortótropo, una de sus direcciones de ortotropía es la dirección 3. \mathbf{S} es el tensor de cuarto orden de complianzas 3D, sus componentes son S_{ijkl} . Cuando se manejan placas y cascarones, es útil definir los siguientes tensores

de complianzas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{S}}} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^2 S_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_\delta, \\ \underline{\underline{\mathbf{S}_c}} = 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^2 S_{\alpha\beta 33} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta, \\ \underline{\underline{\mathbf{S}_Q}} = 4 \sum_{\alpha,\beta=1}^2 S_{\alpha 3 \beta 3} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \quad \text{y} \quad S^\sigma = S_{3333} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

3. En todos los cálculos, los términos $\xi_3 \kappa_\alpha$ y $h \kappa_\alpha$ se toman en cuenta, pero términos de orden superior $(\xi_3 \kappa_\alpha)^n$ y $(h \kappa_\alpha)^n$ ($n \geq 2$) son despreciados.
4. Las curvaturas varían suavemente a través de las líneas de curvatura y sus derivadas respecto a ξ_α son despreciables.
5. Para facilitar los cálculos de las complianzas generalizadas, se asume que la divergencia de los vectores de esfuerzos cortantes aplicados en las caras del cascarón son cero:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^+ = \operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^- = 0. \quad (5.3)$$

6. El vector de fuerzas volumétricas \mathbf{f} es uniforme en la dirección del espesor.
7. No se aplican restricciones en las caras interior y exterior del cascarón sobre los desplazamientos 3D.

5.1. Aproximación de esfuerzos y fuerzas generalizadas en un caso estático

La intención del modelo es eliminar la dependencia del problema mecánico de la coordenada del espesor ξ_3 . Por lo tanto, las componentes del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ se escriben en función de coeficientes que dependen de las líneas de curvatura ξ_1 y ξ_2 y de polinomios de la coordenada del espesor ξ_3 . Al conjunto de polinomios se le llama base polinomial, la cual

es presentada a continuación:

$$\begin{aligned}
P_0(\xi_3) &= 1, & P_1(\xi_3) &= \frac{\xi_3}{h}, \\
P_2(\xi_3) &= -6 \left(\frac{\xi_3}{h}\right)^2 + \frac{1}{2}, \\
P_3(\xi_3) &= -2 \left(\frac{\xi_3}{h}\right)^3 + \frac{3}{10} \left(\frac{\xi_3}{h}\right), \\
P_4(\xi_3) &= -\frac{14}{3} \left(\frac{\xi_3}{h}\right)^4 + \left(\frac{\xi_3}{h}\right)^2 - \frac{1}{40} \quad y \\
P_5(\xi_3) &= \left(\frac{\xi_3}{h}\right)^5 - \frac{5}{18} \left(\frac{\xi_3}{h}\right)^3 + \frac{5}{336} \left(\frac{\xi_3}{h}\right).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Para facilitar los cálculos, la base polinomial fue elegida de tal manera que sea ortogonal, lo cual implica que se cumple la siguiente expresión:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} P_m(\xi_3) P_n(\xi_3) d\xi_3 = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n. \tag{5.5}$$

La expresión por la que se aproxima al campo de esfuerzos 3D es:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{m_{ij}} \sigma_{ij}^n(\xi_1, \xi_2) P_n(\xi_3) \tag{5.6}$$

donde m_{ij} representa el grado polinomial de la aproximación sobre la componente de esfuerzo σ_{ij} . Es de gran importancia señalar que el tensor de esfuerzos tiene la propiedad de simetría, de tal forma que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. La aproximación del campo de esfuerzos debe verificar la ecuación de equilibrio local 3D

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \tag{5.7}$$

El término $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}$ indica la operación divergencia aplicada al tensor 3D de segundo orden $\boldsymbol{\sigma}$. De modo que, para coordenadas curvilíneas ortogonales, la ecuación (5.7) está compuesta por las siguientes ecuaciones escalares:

- la componente α ($(\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}) \cdot \mathbf{e}_\alpha$) aporta:

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\begin{aligned} & \left(\sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial A_{\bar{\beta}} \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \xi_{\bar{\beta}}} \right) + \frac{A_{\bar{\alpha}}}{a_{\bar{\alpha}}} \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial \xi_{\bar{\alpha}}} \sigma_{\bar{\alpha}\alpha} - \frac{A_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{\partial a_{\bar{\alpha}}}{\partial \xi_{\alpha}} \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} \\ & + \frac{\partial A_1 A_2 \sigma_{\alpha 3}}{\partial \xi_3} + A_{\bar{\alpha}} a_{\alpha} \kappa_{\alpha} \sigma_{3\alpha} \end{aligned} \right] + f_{\alpha} = 0; \tag{5.8}$$

- la componente 3 ($(\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}) \cdot \mathbf{e}_3$) aporta:

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\sum_{\beta=1}^2 \left(\frac{\partial A_{\bar{\beta}} \sigma_{3\beta}}{\partial \xi_{\beta}} - A_{\bar{\beta}} a_{\beta} \kappa_{\beta} \sigma_{\beta\beta} \right) + \frac{\partial A_1 A_2 \sigma_{33}}{\partial \xi_3} \right] + f_3 = 0. \quad (5.9)$$

Con el fin de encontrar una aproximación congruente con la ecuación de equilibrio en (5.7), es necesario definir el grado máximo m_{ij} de los polinomios en la expresión (5.6) para cada una de las componentes del tensor $\boldsymbol{\sigma}$. Para lograr esta tarea, se debe de considerar que la aproximación de esfuerzos cumpla con las condiciones de frontera en las caras del cascarón, por lo que se deben verificar las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{s}^+(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{13}(\xi_1, \xi_2, h/2) \\ \sigma_{23}(\xi_1, \xi_2, h/2) \\ \sigma_{33}(\xi_1, \xi_2, h/2) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{s}^-(\xi_1, \xi_2) = - \begin{pmatrix} \sigma_{13}(\xi_1, \xi_2, -h/2) \\ \sigma_{23}(\xi_1, \xi_2, -h/2) \\ \sigma_{33}(\xi_1, \xi_2, -h/2) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Además, es necesario definir los siguientes tensores de fuerzas generalizadas:

- El tensor de orden 2 de fuerzas de membrana en el plano $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$, sus componentes son:

$$N_{\alpha\beta} = \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{\alpha\beta} (1 + \xi_3 \kappa_{\bar{\beta}}) d\xi_3. \quad (5.11)$$

- El tensor de orden 2 de momentos en el plano $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$, sus componentes están dadas por:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{h^-}^{h^+} \xi_3 \sigma_{\alpha\beta} (1 + \xi_3 \kappa_{\bar{\beta}}) d\xi_3. \quad (5.12)$$

- El tensor de orden 1 de fuerzas cortantes $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$, sus componentes están dadas por:

$$Q_{\alpha} = \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{\alpha 3} \left(1 + \frac{\xi_3}{R_{\bar{\alpha}}} \right) d\xi_3. \quad (5.13)$$

Los subíndices $\bar{\beta}$ y $\bar{\alpha}$ dependen de β y α como sigue:

$$\bar{\beta} = 3 - \beta \quad \text{y} \quad \bar{\alpha} = 3 - \alpha. \quad (5.14)$$

Las dos fuerzas generalizadas en el plano, $N_{\alpha\beta}$ y $M_{\alpha\beta}$, son dependientes solamente de la componente $\sigma_{\alpha\beta}$ del tensor de esfuerzos, por lo que es conveniente escoger a esta componente de esfuerzo como un polinomio de primer grado. La forma expandida de $\sigma_{\alpha\beta}$

es:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sigma_{\alpha\beta}^0(\xi_1, \xi_2)P_0(\xi_3) + \sigma_{\alpha\beta}^1(\xi_1, \xi_2)P_1(\xi_3). \quad (5.15)$$

Realizando las integrales en (5.11) y (5.12) con la aproximación (5.15) se obtiene

$$N_{\alpha\beta} = h\sigma_{\alpha\beta}^0 + \frac{h^2\kappa_{\bar{\beta}}}{12}\sigma_{\alpha\beta}^1 \quad y \quad (5.16)$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{h^3\kappa_{\bar{\beta}}}{12}\sigma_{\alpha\beta}^0 + \frac{h^2}{12}\sigma_{\alpha\beta}^1. \quad (5.17)$$

Es evidente que, debido a las curvaturas y a diferencia que en placas, los tensores $\underline{\mathbf{N}}$ y $\underline{\mathbf{M}}$ no son simétricos. Con el propósito de escribir a los coeficientes $\sigma_{\alpha\beta}^0$ y $\sigma_{\alpha\beta}^1$ en función de las fuerzas generalizadas $N_{\alpha\beta}$ y $M_{\alpha\beta}$, se multiplica la expresión (5.16) por $\frac{h^2\kappa_{\bar{\beta}}}{12}$, lo que conduce a lo que sigue:

$$\frac{h^2\kappa_{\bar{\beta}}}{12}N_{\alpha\beta} = h\kappa_{\bar{\beta}}\frac{h^2\sigma_{\alpha\beta}^0}{12} + h^2\kappa_{\bar{\beta}}^2\frac{h^2\sigma_{\alpha\beta}^1}{12^2}, \quad (5.18)$$

Según la suposición 3 en la página 41, la expresión anterior puede reducirse a la forma:

$$\frac{h^2\kappa_{\bar{\beta}}}{12}N_{\alpha\beta} = h\kappa_{\bar{\beta}}\frac{h^2\sigma_{\alpha\beta}^0}{12}, \quad (5.19)$$

restando las ecuaciones (5.19) y (5.17), se obtiene:

$$\frac{h^2\kappa_{\bar{\beta}}}{12}N_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta} = -\frac{h^2\sigma_{\alpha\beta}^1}{12}. \quad (5.20)$$

De esta manera, realizando operaciones sencillas, la forma del coeficiente $\sigma_{\alpha\beta}^1$ es:

$$\sigma_{\alpha\beta}^1 = \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^2} - N_{\alpha\beta}\kappa_{\bar{\beta}}. \quad (5.21)$$

Para determinar a $\sigma_{\alpha\beta}^0$, se introduce el coeficiente $\sigma_{\alpha\beta}^1$ en (5.21) en la ecuación (5.16), lo que conduce a:

$$N_{\alpha\beta} = h\sigma_{\alpha\beta}^0 + \frac{h^2\kappa_{\bar{\beta}}}{12}\frac{12M_{\alpha\beta}}{h^2} - \frac{h^2\kappa_{\bar{\beta}}^2}{12}N_{\alpha\beta}. \quad (5.22)$$

Si se eliminan los términos despreciables $\frac{h^2\kappa_{\bar{\beta}}^2}{12}N_{\alpha\beta}$ y despejando se obtiene:

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{N_{\alpha\beta}}{h} - \frac{\kappa_{\bar{\beta}}M_{\alpha\beta}}{h}. \quad (5.23)$$

Entonces, los esfuerzos en el plano en función de las fuerzas generalizadas quedan definidos

por:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left(\frac{N_{\alpha\beta}}{h} - \frac{\kappa_{\bar{\beta}} M_{\alpha\beta}}{h} \right) P_0 + \left(\frac{12M_{\alpha\beta}}{h^2} - N_{\alpha\beta} \kappa_{\bar{\beta}} \right) P_1 \quad (5.24)$$

En el desarrollo del modelo matemático, será de gran utilidad la propiedad de simetría del tensor de esfuerzos 3D. Al explotar esta propiedad en los esfuerzos en el plano $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$ se obtiene la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{N_{12}}{h} - \frac{\kappa_1 M_{12}}{h} \right) P_0 + \left(\frac{12M_{12}}{h^2} - N_{12} \kappa_1 \right) P_1 = \left(\frac{N_{21}}{h} - \frac{\kappa_2 M_{21}}{h} \right) P_0 + \left(\frac{12M_{21}}{h^2} - N_{21} \kappa_2 \right) P_1, \quad (5.25)$$

por consiguiente

$$\frac{N_{12}}{h} - \frac{\kappa_1 M_{12}}{h} = \frac{N_{21}}{h} - \frac{\kappa_2 M_{21}}{h} \quad \text{y} \quad \frac{12M_{12}}{h^2} - N_{12} \kappa_1 = \frac{12M_{21}}{h^2} - N_{21} \kappa_2. \quad (5.26)$$

Luego, es fácil deducir las siguientes relaciones:

$$N_{21} = N_{12} + \delta\kappa M_{12} \quad \text{y} \quad M_{21} = \frac{h^2}{12} \delta\kappa N_{12} + M_{12}, \quad (5.27)$$

donde $\delta\kappa = \kappa_2 - \kappa_1$. Vale la pena mencionar que si las curvaturas principales del cascarón son iguales ($\kappa_1 = \kappa_2$) los tensores de fuerzas generalizadas $\underline{\mathbf{N}}$ y $\underline{\mathbf{M}}$ serán simétricos, lo que es notorio en las expresiones en (5.27).

Ahora que la aproximación de los esfuerzos en el plano $\sigma_{\alpha\beta}$ ya ha sido determinada, la componente $\sigma_{\alpha 3}$ es la única incógnita en la componente α de la ecuación de equilibrio local, lo cual es apreciable en la ecuación (5.8). En esta ecuación, aparecen términos de las formas e igualdades listadas a continuación:

$$\bullet \quad A_{\bar{\beta}} \sigma_{\alpha\beta} = a_{\bar{\beta}} \left(\frac{1}{h} N_{\alpha\beta} P_0 + \frac{12}{h^2} M_{\alpha\beta} P_1 - \frac{2\kappa_{\bar{\beta}}}{h} M_{\alpha\beta} P_2 \right). \quad (5.28)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial A_{\bar{\beta}} \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \xi_{\beta}} = \frac{1}{h} \frac{\partial a_{\bar{\beta}} N_{\alpha\beta}}{\partial \xi_{\beta}} P_0 + \frac{12}{h^2} \frac{\partial a_{\bar{\beta}} M_{\alpha\beta}}{\partial \xi_{\beta}} P_1 - \frac{2\kappa_{\bar{\beta}}}{h} \frac{\partial a_{\bar{\beta}} M_{\alpha\beta}}{\partial \xi_{\beta}} P_2 \quad (5.29)$$

$$\bullet \quad A_{\bar{\alpha}}\sigma_{\alpha 3} = A_{\bar{\alpha}} \sum_{n=0}^{m_{\alpha 3}} \sigma_{\alpha 3}^n(\xi_1, \xi_2) P_n(\xi_3). \quad (5.30)$$

Trabajemos ahora sobre la expresión mostrada en (5.30). El factor de escala $A_{\bar{\alpha}}$ puede escribirse en función de la base polinomial bajo la forma:

$$A_{\bar{\alpha}} = a_{\bar{\alpha}}(P_0 + h\kappa_{\bar{\alpha}}P_1), \quad (5.31)$$

por lo que

$$A_{\bar{\alpha}}\sigma_{\alpha 3} = a_{\bar{\alpha}}\sigma_{\alpha 3}^0(P_0 + h\kappa_{\bar{\alpha}}P_1) + a_{\bar{\alpha}} \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \sigma_{\alpha 3}^n P_0 P_n + a_{\bar{\alpha}} h \kappa_{\bar{\alpha}} \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \sigma_{\alpha 3}^n P_1 P_n \quad (5.32)$$

Los productos de polinomios en la expresión anterior tienen las equivalencias $P_1 P_n = (p_1^n P_{n+1} + p_2^n P_{n-1})$ ($n \geq 0$), donde p_1^n y p_2^n son constantes de orden P_0/h . Estas igualdades de productos de polinomios conducen a:

$$A_{\bar{\alpha}}\sigma_{\alpha 3} = a_{\bar{\alpha}}\sigma_{\alpha 3}^0(P_0 + h\kappa_{\bar{\alpha}}P_1) + a_{\bar{\alpha}} \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \sigma_{\alpha 3}^n P_n + a_{\bar{\alpha}} h \kappa_{\bar{\alpha}} \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \sigma_{\alpha 3}^n (p_1^n P_{n+1} + p_2^n P_{n-1}). \quad (5.33)$$

La ecuación (5.33) multiplicada por κ_{α} y por $\frac{h}{h}$ resulta en:

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha} A_{\bar{\alpha}} \sigma_{\alpha 3} &= a_{\bar{\alpha}} \frac{\sigma_{\alpha 3}^0}{h} (P_0 + h\kappa_{\bar{\alpha}}P_1) h\kappa_{\alpha} + a_{\bar{\alpha}} h \kappa_{\alpha} \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \frac{\sigma_{\alpha 3}^n}{h} P_n \\ &+ a_{\bar{\alpha}} h^2 \kappa_{\alpha} \kappa_{\bar{\alpha}} \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \frac{\sigma_{\alpha 3}^n}{h} (p_1^n P_{n+1} + p_2^n P_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Despreciando términos se llega a:

$$\kappa_{\alpha} A_{\bar{\alpha}} \sigma_{\alpha 3} = a_{\bar{\alpha}} \frac{\sigma_{\alpha 3}^0}{h} P_0 h \kappa_{\alpha} + a_{\bar{\alpha}} h \kappa_{\alpha} \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \frac{\sigma_{\alpha 3}^n}{h} P_n. \quad (5.35)$$

La ecuación (5.33) multiplicada por A_{α} produce:

$$\begin{aligned} A_{\alpha} A_{\bar{\alpha}} \sigma_{\alpha 3} &= a_1 a_2 \sigma_{\alpha 3}^0 [P_0 + h(\kappa_1 + \kappa_2) P_1] + a_1 a_2 \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \sigma_{\alpha 3}^n P_n \\ &+ a_1 a_2 h (\kappa_1 + \kappa_2) \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \sigma_{\alpha 3}^n (p_1^n P_{n+1} + p_2^n P_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Derivar la ecuación anterior respecto a la coordenada en dirección del espesor ξ_3 y multi-

plicarlo por $\frac{h}{h}$ conduce a la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1 A_2 \sigma_{\alpha 3}}{\partial \xi_3} = & a_1 a_2 \frac{\sigma_{\alpha 3}^0}{h} h^2 (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\partial P_1}{\partial \xi_3} + a_1 a_2 \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \frac{\sigma_{\alpha 3}^n}{h} h \frac{\partial P_n}{\partial \xi_3} \\ & + a_1 a_2 h^2 (\kappa_1 + \kappa_2) \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \frac{\sigma_{\alpha 3}^n}{h} \left(p_1^n \frac{\partial P_{n+1}}{\partial \xi_3} + p_2^n \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \xi_3} \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Es importante resaltar que las derivadas de los polinomios respecto a ξ_3 son de orden P_0/h . Para escoger de forma congruente el grado polinomial $m_{\alpha 3}$ de $\sigma_{\alpha 3}$, se debe tomar en cuenta lo siguiente:

1. El polinomio más alto que aparece en las ecuaciones (5.28) y (5.29) es P_2 .
2. En la ecuación (5.37), el grado polinomial de la derivada $\frac{\partial P_n}{\partial \xi_3}$ es igual a $n - 1$. Por lo que $a_1 a_2 \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \sigma_{\alpha 3}^n \frac{\partial P_n}{\partial \xi_3}$ es de grado polinomial $m_{\alpha 3} - 1$.
3. Las aportaciones de

$$a_1 a_2 h^2 (\kappa_1 + \kappa_2) \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \frac{\sigma_{\alpha 3}^n}{h} \left(p_1^n \frac{\partial P_{n+1}}{\partial \xi_3} + p_2^n \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \xi_3} \right) \quad \text{y} \quad a_{\bar{\alpha}} h \kappa_{\alpha} \sum_{n=1}^{m_{\alpha 3}} \frac{\sigma_{\alpha 3}^n}{h} P_n$$

en las ecuaciones (5.37) y (5.35) son de orden $h \kappa_{\alpha}$.

Los puntos 1 y 2 implican que $\sigma_{\alpha \beta}$ y $\sigma_{\alpha 3}$ aportan a la ecuación (5.8) polinomios de grado 2 y $m_{\alpha 3} - 1$, respectivamente. El punto 3 indica que $\sigma_{\alpha 3}^n P_n$ y $\sigma_{\alpha 3}^n \frac{\partial P_{n+1}}{\partial \xi_3}$ aportan a la ecuación de equilibrio en ordenes menores que $\sigma_{\alpha 3}^n \frac{\partial P_n}{\partial \xi_3}$. Debido a esto, para elegir el grado polinomial m de $\sigma_{\alpha 3}$ hay que basarse en el grado polinomial de las aportaciones de $\sigma_{\alpha 3}^n \frac{\partial P_n}{\partial \xi_3}$. Por lo tanto, para asegurar la compatibilidad entre las aproximaciones de los esfuerzos $\sigma_{\alpha \beta}$ y $\sigma_{\alpha 3}$ en la ecuación (5.7), es necesario que ambos esfuerzos aporten polinomios de grado 2. Esto quiere decir que $m_{\alpha 3} - 1 = 2$ para la aproximación del esfuerzo $\sigma_{\alpha 3}$. Así, el grado polinomial de $\sigma_{\alpha 3}$ debe de ser $m_{\alpha 3} = 3$.

Ahora, comprobemos la compatibilidad entre las aproximaciones de los esfuerzos en el plano $\sigma_{\alpha \beta}$ y cortantes fuera del plano $\sigma_{\alpha 3}$. La forma expandida de los esfuerzos cortantes fuera del plano es:

$$\sigma_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}^0 P_0 + \sigma_{\alpha 3}^1 P_1 + \sigma_{\alpha 3}^2 P_2 + \sigma_{\alpha 3}^3 P_3 \quad (5.38)$$

Con esta definición se puede llegar a las expresiones:

$$\kappa_\alpha A_{\bar{\alpha}} \sigma_{\alpha 3} = a_\alpha \left(\kappa_\alpha \sigma_{\alpha 3}^0 P_0 + \sigma_{\alpha 3}^1 \kappa_\alpha P_1 + \kappa_\alpha \sigma_{\alpha 3}^2 P_2 + \kappa_\alpha \sigma_{\alpha 3}^3 P_3 \right) \quad \text{y} \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial A_1 A_2 \sigma_{\alpha 3}}{\partial \xi_3} = a_1 a_2 \left\{ \begin{array}{l} \left[h(\kappa_1 + \kappa_2) \left(\frac{\sigma_{\alpha 3}^0}{h} - \frac{\sigma_{\alpha 3}^2}{h} \right) + \frac{\sigma_{\alpha 3}^1}{h} - \frac{\sigma_{\alpha 3}^3}{5h} \right] P_0 \\ + \left[h(\kappa_1 + \kappa_2) \left(\frac{2\sigma_{\alpha 3}^1}{h} - \frac{3\sigma_{\alpha 3}^3}{5h} \right) - \frac{12\sigma_{\alpha 3}^2}{h} \right] P_1 \\ + \left[3h(\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma_{\alpha 3}^2}{h} + \frac{\sigma_{\alpha 3}^3}{h} \right] P_2 + 4h(\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma_{\alpha 3}^3}{h} P_3. \end{array} \right\} \quad (5.40)$$

Multiplicando la componente α de la ecuación de equilibrio 3D en (5.7) por $A_1 A_2$ e introduciendo las definiciones (5.21), (5.23), (5.24), (5.37) y (5.40) se llega a

$$A_1 A_2 (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{e}_\alpha = a_1 a_2 (F_\alpha^0 P_0 + F_\alpha^1 P_1 + F_\alpha^2 P_2 + F_\alpha^3 P_3) \quad (5.41)$$

donde las cantidades que multiplican a los polinomios son:

$$F_\alpha^0 = \frac{1}{h} \mathbf{div} \underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{\sigma_{\alpha 3}^1}{h} h \kappa_\alpha + \frac{\sigma_{\alpha 3}^1}{h} - \frac{\sigma_{\alpha 3}^3}{5h} + \left(\frac{\sigma_{\alpha 3}^0}{h} - \frac{\sigma_{\alpha 3}^2}{h} \right) h(\kappa_1 + \kappa_2) + f_\alpha, \quad (5.42)$$

$$F_\alpha^1 = \frac{12}{h^2} \mathbf{div} \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{\sigma_{\alpha 3}^1}{h} h \kappa_\alpha - \frac{12\sigma_{\alpha 3}^2}{h} + \left(2\frac{\sigma_{\alpha 3}^1}{h} - \frac{3\sigma_{\alpha 3}^3}{5h} + f_\alpha \right) h(\kappa_1 + \kappa_2), \quad (5.43)$$

$$F_\alpha^2 = -\frac{2}{h} \mathbf{div} (\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}') \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{3\sigma_{\alpha 3}^2}{h} h(\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{\sigma_{\alpha 3}^3}{h} + \frac{\sigma_{\alpha 3}^2}{h} h \kappa_\alpha, \quad (5.44)$$

$$F_\alpha^3 = \frac{4\sigma_{\alpha 3}^3}{h} h(\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{\sigma_{\alpha 3}^3}{h} h \kappa_\alpha. \quad (5.45)$$

Se elige una expresión de $\sigma_{\alpha 3}^3$ que verifique $F_\alpha^2 = 0$, este proceso resulta en:

$$\frac{\sigma_{\alpha 3}^3}{h} = \frac{2}{h} \mathbf{div} (\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}') \cdot \mathbf{e}_\alpha - \frac{\sigma_{\alpha 3}^2}{h} h(4\kappa_\alpha + 3\kappa_{\bar{\alpha}}) \quad (5.46)$$

De esta manera, $\sigma_{\alpha 3}^3/h$ es de orden $h\kappa_\alpha$. Aplicando (5.46) en (5.45), es fácil demostrar que $F_\alpha^3 = 0$ en el orden $h^2\kappa_\alpha\kappa_\beta$ y se da la compatibilidad entre el grado de las aproximaciones de los esfuerzos $\sigma_{\alpha\beta}$ y $\sigma_{\alpha 3}$.

Ahora que se ha establecido y comprobado el grado polinomial $m_{\alpha 3}$ de la aproximación

de los esfuerzos cortantes fuera del plano, apliquemos la ecuación (5.38) en las ecuaciones (5.13) y (5.10), de lo que resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Q_\alpha = h\sigma_{\alpha 3}^0 + \frac{h^2\kappa_{\bar{\alpha}}}{12}\sigma_{\alpha 3}^1, \quad (5.47)$$

$$\tau_\alpha^+ = \sigma_{\alpha 3}^0 + \frac{1}{2}\sigma_{\alpha 3}^1 - \sigma_{\alpha 3}^2 - \frac{1}{10}\sigma_{\alpha 3}^3 \quad y \quad (5.48)$$

$$\tau_\alpha^- = \sigma_{\alpha 3}^0 - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha 3}^1 - \sigma_{\alpha 3}^2 + \frac{1}{10}\sigma_{\alpha 3}^3. \quad (5.49)$$

A partir de este sistema, se puede determinar la forma de los coeficientes restantes de la aproximación de $\sigma_{\alpha 3}$ en función de fuerzas generalizadas y esfuerzos aplicados en las caras. La forma final de estos coeficientes se muestra a continuación:

$$\sigma_{\alpha 3}^0 = \frac{Q_\alpha}{h} - \frac{h\kappa_{\bar{\alpha}}}{12}(\tau_\alpha^+ + \tau_\alpha^-), \quad (5.50)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^1 = \tau_\alpha^+ + \tau_\alpha^- + \frac{1}{5}\sigma_{\alpha 3}^3 \quad y \quad (5.51)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^2 = \frac{Q_\alpha}{h} - \frac{\tau_\alpha^+ - \tau_\alpha^-}{2} - \frac{h\kappa_{\bar{\alpha}}}{12}(\tau_\alpha^+ + \tau_\alpha^-). \quad (5.52)$$

Por último, utilicemos las expresiones en (5.21) y (5.23) para escribir al coeficiente $\sigma_{\alpha 3}^3$ en función de $N_{\alpha\beta}$ y $M_{\alpha\beta}$, lo que produce la igualdad

$$\sigma_{\alpha 3}^3 = \left\{ 2\text{div}(\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}') - (4\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + 3\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}') \cdot \left[\underline{\underline{\mathbf{Q}}} - \frac{h}{2}(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^+ - \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^-) \right] \right\} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \quad (5.53)$$

La única componente del tensor de esfuerzos 3D que queda por aproximar es el esfuerzo normal fuera del plano σ_{33} . El grado polinomial de este esfuerzo es determinado con un proceso similar a aquel usado en la componente $\sigma_{\alpha 3}$, de lo que resulta un grado $m_{33} = 4$. Entonces, el esfuerzo σ_{33} en forma expandida es:

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^0 P_0 + \sigma_{33}^1 P_1 + \sigma_{33}^2 P_2 + \sigma_{33}^3 P_3 + \sigma_{33}^4 P_4, \quad (5.54)$$

la cual debe de cumplir con las condiciones:

$$\sigma_{33}(\xi_1, \xi_2, h/2) = \sigma^+(\xi_1, \xi_2) = \sigma_{33}^0 + \frac{1}{2}\sigma_{33}^1 - \sigma_{33}^2 - \frac{1}{10}\sigma_{33}^3 - \frac{1}{15}\sigma_{33}^4 \quad y \quad (5.55)$$

$$\sigma_{33}(\xi_1, \xi_2, -h/2) = \sigma^-(\xi_1, \xi_2) = \sigma_{33}^0 - \frac{1}{2}\sigma_{33}^1 - \sigma_{33}^2 + \frac{1}{10}\sigma_{33}^3 - \frac{1}{15}\sigma_{33}^4. \quad (5.56)$$

Con estas condiciones y para que se verifique la ecuación de equilibrio (5.9), los coeficientes del esfuerzo normal fuera del plano deben tener las siguientes expresiones:

$$\sigma_{33}^0 = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \sigma_{33}^2 + \frac{1}{15}\sigma_{33}^4, \quad (5.57)$$

$$\sigma_{33}^1 = \sigma^+ + \sigma^- + \frac{1}{5}\sigma_{33}^3, \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^2 = & \frac{h}{30} \operatorname{div} [\underline{\operatorname{div}} (\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}') - 2\underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}] - \frac{1}{h} \underline{\mathbf{M}} : \underline{\boldsymbol{\kappa}} \\ & + \frac{h}{12} \operatorname{div} \left[\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^- + \frac{h}{10} (4\underline{\boldsymbol{\kappa}} + 5\underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right] \\ & + \frac{h}{12} \left[(\kappa_1 + \kappa_2) \left(2\sigma_{33}^1 - \frac{3}{5}\sigma_{33}^3 + hf_3 \right) - \frac{4}{5h}\sigma_{33}^4 \right], \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\sigma_{33}^3 = -\operatorname{div} \underline{\mathbf{Q}} + \frac{h}{4} \operatorname{div} [2(\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) - h\underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-)] \quad y \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^4 = & -\frac{3h}{14} \operatorname{div} [\underline{\operatorname{div}} (\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}')] + \frac{3h}{7} \operatorname{div} [(2\underline{\boldsymbol{\kappa}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \underline{\mathbf{Q}}] \\ & - \frac{3h^2}{14} \operatorname{div} [(2\underline{\boldsymbol{\kappa}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-)]. \end{aligned} \quad (5.61)$$

5.2. Desplazamientos, ecuaciones de equilibrio y condiciones de frontera generalizadas sobre fuerzas.

Según el teorema de Reissner, las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo se obtienen cuando el funcional HR es estacionario respecto al campo de desplazamientos \mathbf{u} . Entonces, es de utilidad establecer un funcional auxiliar que sólo contenga los términos que se multiplican por el campo \mathbf{u}^* , este funcional queda como:

$$T(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{u}^* + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega_s} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} - \mathbf{s}^g) \cdot \mathbf{u}^* dS \quad (5.62)$$

Es así que, para encontrar las ecuaciones de equilibrio generalizadas del modelo aquí desarrollado, se introduce la aproximación del tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ en el funcional T . Lo

anterior resulta en

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = & - \int_{\omega} \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \underline{\text{div}} \underline{\mathbf{N}}^* + \underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^* \\ + \frac{h}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \\ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^- + h \underline{\mathbf{f}} \end{array} \right) \cdot \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} d\xi_3 \\ \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} d\xi_3 \end{array} \right] d\omega \\
& - \int_{\omega} \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \underline{\text{div}} \underline{\mathbf{M}}^* - \underline{\mathbf{Q}}^* \\ + \frac{h^2}{4} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \\ + \frac{h}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \\ + \frac{h^3 (\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \underline{\mathbf{f}} \end{array} \right) \cdot \int_{h^-}^{h^+} \frac{12P_1}{h^2} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} d\xi_3 \\ \int_{h^-}^{h^+} \frac{12P_1}{h^2} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} d\xi_3 \end{array} \right] d\omega \\
& - \int_{\omega} \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \underline{\text{div}} \underline{\mathbf{Q}}^* + h (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} \\ + \sigma^+ + \sigma^- - \underline{\mathbf{N}}^* : \underline{\boldsymbol{\kappa}} + h f_3 \end{array} \right) \cdot \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} u_3^* d\xi_3 \\ \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} u_3^* d\xi_3 \end{array} \right] d\omega \\
& + \int_{\partial\omega_s} \left[\begin{array}{l} (\underline{\mathbf{N}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} d\xi_3 \\ + (\underline{\mathbf{M}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \int_{h^-}^{h^+} \frac{12P_1}{h^2} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} d\xi_3 \end{array} \right] ds \\
& + \int_{\partial\omega_s} \left[\underline{\mathbf{Q}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 \cdot \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} u_3^* d\xi_3 \right] ds - \int_{\partial\Omega_s} \mathbf{s}^g \cdot \mathbf{u}^* dS
\end{aligned} \tag{5.63}$$

de donde se identifican los siguientes cinco desplazamientos generalizados del modelo:

- vector de desplazamientos tangenciales $\underline{\mathbf{U}}^*$, cuyas componentes son:

$$\begin{pmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{pmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} d\xi_3 \tag{5.64}$$

- desplazamiento en dirección del espesor:

$$U_3^* = \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} u_3^* d\xi_3 \tag{5.65}$$

- vector de rotaciones $\underline{\boldsymbol{\Phi}}^*$, sus componentes son:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^* \\ \Phi_2^* \end{pmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \frac{12P_1}{h^2} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} d\xi_3. \tag{5.66}$$

Cabe señalar que, hasta este punto, no ha sido necesaria una aproximación sobre el campo de desplazamientos \mathbf{u} . Sin embargo, se puede afirmar que sus componentes tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{u}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} U_1^*(\xi_1, \xi)P_0(\xi_3) + h\Phi_1^*(\xi_1, \xi)P_1(\xi_3) + \delta u_1^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ U_2^*(\xi_1, \xi_2)P_0(\xi_3) + h\Phi_2^*(\xi_1, \xi)P_1(\xi_3) + \delta u_2^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ U_3^*(\xi_1, \xi_2)P_0(\xi_3) + \delta u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

donde δu_1 , δu_2 y δu_3 verifican

$$\int_{h^-}^{h^+} P_i \delta u_\alpha d\xi_3 \quad \text{para } i \geq 2 \quad \text{y} \quad \int_{h^-}^{h^+} P_j \delta u_3 d\xi_3 \quad \text{para } j \geq 1. \quad (5.68)$$

Los desplazamientos generalizados permiten reescribir el funcional T en (5.63) bajo la forma:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = & - \int_{\omega} \left[\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{N}}^* + \underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^* + \frac{h}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) (\boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^-) \\ + \boldsymbol{\tau}^+ + \boldsymbol{\tau}^- + h\underline{\mathbf{f}} \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{U}}^* \right] d\omega \\ & - \int_{\omega} \left[\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{M}}^* - \underline{\mathbf{Q}}^* + \frac{h^2}{4} (\kappa_1 + \kappa_2) (\boldsymbol{\tau}^+ + \boldsymbol{\tau}^-) \\ + \frac{h}{2} (\boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^-) + \frac{h^3 (\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \underline{\mathbf{f}} \end{pmatrix} \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^* \right] d\omega \\ & - \int_{\omega} \left[\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{Q}}^* + h (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-}{2} \\ + \boldsymbol{\sigma}^+ + \boldsymbol{\sigma}^- - \underline{\mathbf{N}}^* : \underline{\boldsymbol{\kappa}} + hf_3 \end{pmatrix} \cdot U_3^* \right] d\omega \\ & + \int_{\partial\omega_s} [(\underline{\mathbf{N}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \underline{\mathbf{U}}^* + (\underline{\mathbf{M}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^*] ds \\ & + \int_{\partial\omega_s} [\underline{\mathbf{Q}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 \cdot U_3^*] ds - \int_{\partial\Omega_s} \mathbf{s}^g \cdot \mathbf{u}^* dS \end{aligned} \quad (5.69)$$

donde $\underline{\mathbf{n}}^0$ es el vector normal exterior en el contorno de la superficie media ω del cascarón y ds es un diferencial de arco en el contorno de ω . Los diferenciales ds y dS están dados por las siguientes ecuaciones:

$$ds = \sqrt{a_1^2 d\xi_1^2 + a_2^2 d\xi_2^2} \quad \text{y} \quad (5.70)$$

$$dS = [1 + \xi_3 (\kappa_1 (n_1^0)^2 + \kappa_2 (n_2^0)^2)] ds d\xi_3 \quad (5.71)$$

donde n_1^0 y n_2^0 son las componentes del vector normal exterior $\underline{\mathbf{n}}^0$. En el cálculo de la integral $\int_{\partial\Omega_T} \mathbf{s}^g \cdot \mathbf{u}^* dS$ nos apoyaremos de la forma de \mathbf{u} mostrada en (5.67), lo que

conduce a:

$$\int_{\partial\Omega_T} \mathbf{s}^g \cdot \mathbf{u}^* dS = \int_{\partial\omega_s} \left(\underline{\mathbf{F}}^g \cdot \underline{\mathbf{U}}^* + \underline{\mathbf{C}}^g \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^* + F_3^g U_3^* \right) ds \quad (5.72)$$

donde

$$\underline{\mathbf{F}}^g = \int_{h^-}^{h^+} [P_0 + h(\kappa_1 n_1^2 + \kappa_2 n_2^2) P_1] \begin{pmatrix} s_1^g \\ s_2^g \end{pmatrix} d\xi_3, \quad (5.73)$$

$$F_3^g = \int_{h^-}^{h^+} [P_0 + h P_1 (\kappa_1 n_1^2 + \kappa_2 n_2^2)] s_3^g d\xi_3 \quad y \quad (5.74)$$

$$\underline{\mathbf{C}}^g = \int_{h^-}^{h^+} \left[\frac{h^2}{12} P_0 (\kappa_1 n_1^2 + \kappa_2 n_2^2) + h P_1 \left(1 - \frac{h}{6} (\kappa_1 n_1^2 + \kappa_2 n_2^2) \right) \right] \begin{pmatrix} s_1^g \\ s_2^g \end{pmatrix} d\xi_3. \quad (5.75)$$

Tomando en cuenta las definiciones en las ecuaciones anteriores, se puede expresar el funcional T como sigue:

$$\begin{aligned} T = & - \int_{\omega} \left[\left(\frac{\operatorname{div} \underline{\mathbf{N}}^* + \underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^* + \frac{h}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) (\boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^-)}{+ \boldsymbol{\tau}^+ + \boldsymbol{\tau}^- + h \underline{\mathbf{f}}} \right) \cdot \underline{\mathbf{U}}^* \right] d\omega \\ & - \int_{\omega} \left[\left(\frac{\operatorname{div} \underline{\mathbf{M}}^* - \underline{\mathbf{Q}}^* + \frac{h^2}{4} (\kappa_1 + \kappa_2) (\boldsymbol{\tau}^+ + \boldsymbol{\tau}^-)}{+ \frac{h}{2} (\boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^-) + \frac{h^3}{12} (\kappa_1 + \kappa_2) \underline{\mathbf{f}}} \right) \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^* \right] d\omega \\ & - \int_{\omega} \left[\left(\operatorname{div} \underline{\mathbf{Q}}^* + h(\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \sigma^+ + \sigma^- - \underline{\mathbf{N}}^* : \underline{\boldsymbol{\kappa}} + h f_3 \right) \cdot U_3^* \right] d\omega \\ & + \int_{\partial\omega_s} [(\underline{\mathbf{N}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 - \underline{\mathbf{F}}^g) \cdot \underline{\mathbf{U}}^* + (\underline{\mathbf{M}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 - \underline{\mathbf{C}}^g) \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^*] ds \\ & + \int_{\partial\omega_s} [\underline{\mathbf{Q}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 - F_3^g] \cdot U_3^* ds. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Entonces, en el caso de cascarones, el funcional HR queda expresado en términos de los desplazamientos generalizados. De tal manera que, según el punto 2 del teorema de Reissner descrito en la sección 1.5, la estacionariedad del funcional HR debe darse para los desplazamientos generalizados $\underline{\mathbf{U}}^*$, $\underline{\boldsymbol{\Phi}}^*$ y U_3^i . Para que esto suceda, se deben verificar las siguientes igualdades:

- $\frac{\partial T}{\partial \underline{\mathbf{U}}^*} = 0$. Lo cual ocurre solo si

$$\int_{\omega} \left(\begin{array}{l} \underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{N}}^* + \underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^* + \frac{h}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \\ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^- + h \underline{\mathbf{f}} \end{array} \right) d\omega = 0 \quad \text{y} \quad (5.77)$$

$$\int_{\partial\omega_s} (\underline{\mathbf{N}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 - \underline{\mathbf{F}}^g) ds = 0. \quad (5.78)$$

- $\frac{\partial T}{\partial \underline{\boldsymbol{\Phi}}^*} = 0$. Esta condición solo se da si

$$\int_{\omega} \left(\begin{array}{l} \underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{M}}^* - \underline{\mathbf{Q}}^* + \frac{h^2}{4} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \\ + \frac{h}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) + \frac{h^3 (\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \underline{\mathbf{f}} \end{array} \right) d\omega = 0 \quad \text{y} \quad (5.79)$$

$$\int_{\partial\omega_s} (\underline{\mathbf{M}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 - \underline{\mathbf{C}}^g) ds = 0. \quad (5.80)$$

- $\frac{\partial T}{\partial U_3^*} = 0$. Lo cual se da siempre y cuando

$$\int_{\omega} \left(\begin{array}{l} \underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{Q}}^* + h (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} \\ + \sigma^+ + \sigma^- - \underline{\mathbf{N}}^* : \underline{\boldsymbol{\kappa}} + h f_3 \end{array} \right) d\omega = 0 \quad \text{y} \quad (5.81)$$

$$\int_{\partial\omega_s} (\underline{\mathbf{Q}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 - F_3^g) ds = 0. \quad (5.82)$$

Finalmente, de las expresiones en (5.77), (5.79) y (5.81) se obtienen las siguientes 5 ecuaciones de equilibrio generalizadas en ω :

$$\underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{N}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}} + \frac{h}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) + \underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^- + h \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{0}}, \quad (5.83)$$

$$\underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{Q}} + h (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \sigma^+ + \sigma^- - \underline{\mathbf{N}} : \underline{\boldsymbol{\kappa}} + h f_3 = \underline{\mathbf{0}} \quad \text{y} \quad (5.84)$$

$$\underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{Q}} + \frac{h^2}{4} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) + \frac{h}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) + \frac{h^3 (\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{0}}; \quad (5.85)$$

y de las ecuaciones (5.78), (5.79) y (5.82) resultan las condiciones de frontera sobre

fuerzas generalizadas en $\partial\omega_s$:

$$\underline{\mathbf{F}}^g = \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^0, \quad \underline{\mathbf{C}}^g = \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 \quad \text{y} \quad F_3^g = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^0. \quad (5.86)$$

5.3. Deformaciones, ecuaciones constitutivas y condiciones de frontera generalizadas sobre desplazamientos.

El teorema de Reissner establece que la estacionariedad del funcional HR respecto a el campo de esfuerzos produce las ecuaciones constitutivas y las condiciones de frontera sobre desplazamientos. Por lo tanto, para encontrar las ecuaciones constitutivas del modelo SAM-H, se debe escribir el funcional HR de tal forma que permita aplicar la estacionariedad respecto a las fuerzas generalizadas. Tomemos el funcional T en (5.76) y realicemos una integración por partes en los términos de divergencias de fuerzas generalizadas, de lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = & - \int_{\omega} \left[\begin{aligned} & - \underline{\mathbf{N}}^* : \left(\underline{\mathbf{grad}} \underline{\mathbf{U}}^* + \underline{\boldsymbol{\kappa}} U_3^* \right)^t \\ & + \left(\frac{h}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) + \underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^- + h \underline{\mathbf{f}} \right) \cdot \underline{\mathbf{U}}^* \end{aligned} \right] d\omega \\ & - \int_{\omega} \left[\begin{aligned} & - \underline{\mathbf{M}}^* : \left(\underline{\mathbf{grad}} \underline{\boldsymbol{\Phi}}^* \right)^t \\ & + \left(\frac{h^2}{4} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) + \frac{h}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right) \\ & + \frac{h^3 (\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \underline{\mathbf{f}} \end{aligned} \right] \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^* d\omega \\ & - \int_{\omega} \left[\begin{aligned} & - \underline{\mathbf{Q}}^* \cdot \left(\underline{\mathbf{grad}} U_3^* + \underline{\boldsymbol{\Phi}}^* - \underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{U}}^* \right) \\ & + \left(h (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \sigma^+ + \sigma^- + h f_3 \right) U_3^* \end{aligned} \right] d\omega \\ & - \int_{\partial\omega_u} [(\underline{\mathbf{N}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \underline{\mathbf{U}}^* + (\underline{\mathbf{M}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^* + (\underline{\mathbf{Q}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot U_3^*] dl \\ & - \int_{\partial\omega_s} [\underline{\mathbf{F}}^g \cdot \underline{\mathbf{U}}^* + \underline{\mathbf{C}}^g \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^* + F_3^g \cdot U_3^*] dl \end{aligned} \quad (5.87)$$

Así como fueron identificados los desplazamientos generalizados, de esta última ecuación se identifican los siguientes tensores de deformaciones generalizadas:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}}^* + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}U_3^*, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\underline{\underline{\boldsymbol{\phi}}}^* \quad \text{y} \quad \underline{\underline{\mathbf{d}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\underline{\underline{U}}_3^* + \underline{\underline{\boldsymbol{\phi}}}^* - \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}}^*. \quad (5.88)$$

Una forma alternativa de escribir las deformaciones generalizadas $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^*$ y $\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^*$ se puede conseguir al aplicar las relaciones en (5.27) en la expresión del funcional T en (5.87). Dicha forma alternativa de estas deformaciones generalizadas es:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^* = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{grad}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}}^* + \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}}^* \right) + \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\Phi^*} \quad \text{y} \quad (5.89)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^* = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{grad}}}\underline{\underline{\boldsymbol{\phi}}}^* + \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\underline{\underline{\boldsymbol{\phi}}}^* \right) + \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^{U^*}. \quad (5.90)$$

donde los tensores de segundo orden $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\Phi^*}$ y $\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^{U^*}$ tienen las formas mostradas a continuación:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\Phi^*} = \frac{h^2 \delta \kappa}{12} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_1 a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \Phi_2^* - \frac{1}{a_2} \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{a_1} \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \xi_1} - \frac{1}{a_1 a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} \Phi_1^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (5.91)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^{U^*} = \delta \kappa \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_1 a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} U_2^* - \frac{1}{a_2} \frac{\partial U_1^*}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{a_1} \frac{\partial U_2^*}{\partial \xi_1} - \frac{1}{a_1 a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} U_1^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.92)$$

Las definiciones en (5.90), (5.91) y (5.92) permiten intuir que si $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ entonces las deformaciones generalizadas del modelo SAM-H son las mismas que aquellas de las teorías de placas, lo que es un resultado esperado. Es decir, cuando las curvaturas de la geometría son cero se está tratando con una placa, en este caso las ecuaciones del modelo SAM-H deben “transformarse” en las ecuaciones para placas.

El funcional de Hellinger-Reissner también se puede expresar utilizando el funcional T de la siguiente manera

$$HR(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = T(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) - \int_{\Omega} w_e^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\mathbf{u}}} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^g dS. \quad (5.93)$$

Por ende, ahora nos concierne el término de energía elástica $\int_{\Omega} w_e^* d\Omega$. Para comenzar, en el caso de cascarones ortotrópicos, se escribe la densidad de energía elástica w_e de la siguiente manera:

$$w_e^* = w_e^{s*} + w_e^{Q*} + w_e^{n*} + w_e^{c*} \quad (5.94)$$

donde w_e^{s*} , w_e^{Q*} , w_e^{n*} , w_e^{c*} son densidades de energía elástica debidas a los esfuerzos en el plano, a los esfuerzos cortantes fuera del plano, al esfuerzo normal fuera del plano y al acoplamiento entre los esfuerzos en el plano y el esfuerzo normal fuera del plano,

respectivamente. Dichas densidades de energía están dadas por

$$w_e^{s*} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \frac{1}{2} \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{\alpha\beta}^* S_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}^* (1 + (\kappa_1 + \kappa_2) \xi_3) d\xi_3, \quad (5.95)$$

$$w_e^{Q*} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \frac{1}{2} \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{\alpha 3}^* (\mathbf{e}_\alpha \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}_Q}} \cdot \mathbf{e}_\beta) \sigma_{\beta 3}^* [1 + (\kappa_1 + \kappa_2) \xi_3] d\xi_3, \quad (5.96)$$

$$w_e^{n*} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \frac{1}{2} \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{\alpha\beta}^* (\mathbf{e}_\alpha \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}_c}} \cdot \mathbf{e}_\beta) \sigma_{\beta 3}^* [1 + (\kappa_1 + \kappa_2) \xi_3] d\xi_3, \quad (5.97)$$

$$w_e^{c*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{33}^* S_\sigma \sigma_{33}^* [1 + (\kappa_1 + \kappa_2) \xi_3] d\xi_3. \quad (5.98)$$

El siguiente paso es introducir la aproximación del campo de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ en el cálculo de estas densidades de energía para luego derivarlas respecto a las fuerzas generalizadas. Sin embargo, dicha aproximación no sólo involucra términos de fuerzas generalizadas sino también de divergencias de fuerzas generalizadas. Un ejemplo de ello es el coeficiente $\sigma_{\alpha 3}^3$. Entonces, se deben escribir las divergencias de fuerzas generalizadas en función de las fuerzas generalizadas y sustituirlas en la aproximación de esfuerzos. Las divergencias que están presentes en la aproximación de esfuerzo son:

- $\text{div } \underline{\underline{\mathbf{Q}}}$. Debido a la ecuación de equilibrio (5.84), es remplazada por:

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} - hf_3 - h(\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} - \sigma^+ - \sigma^- \quad (5.99)$$

- $\underline{\underline{\text{div}}} (\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}})$. Esta divergencia es aproximada por:

$$\underline{\underline{\text{div}}} (\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\mathbf{M}}} \quad (5.100)$$

donde $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}})$. Entonces, sustituyendo $\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\mathbf{M}}}$ obtenido a partir de la ecuación de equilibrio (5.85), se obtiene:

$$\underline{\underline{\text{div}}} (\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) \simeq \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}} - \frac{h}{2} (\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^+ - \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^-) \right). \quad (5.101)$$

- $\text{div} [\underline{\underline{\text{div}}} (\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}})]$. De acuerdo con la aproximación en el punto anterior y a la

suposición 5:

$$\operatorname{div} [\underline{\mathbf{div}} (\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}')] \simeq \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \operatorname{div} \underline{\mathbf{Q}} = -\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} (hf_3 + \sigma^+ + \sigma^-) \quad (5.102)$$

- $\operatorname{div} (\underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}})$ y $\operatorname{div} (\underline{\boldsymbol{\kappa}}' \cdot \underline{\mathbf{Q}})$. Éstas son aproximadas por:

$$\operatorname{div} (\underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}) \simeq \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \operatorname{div} \underline{\mathbf{Q}} = -\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} (hf_3 + \sigma^+ + \sigma^-) \quad (5.103)$$

- $\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{\tau}}^+$, $\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{\tau}}^-$, $\operatorname{div} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-)$, $\operatorname{div} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-)$ y $\operatorname{div} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-)$. Todas éstas son tratadas como cero gracias a la suposición 5.

Dicho lo anterior, las formas de los coeficientes de la aproximación de esfuerzos que cambian en el cálculo de las densidades de energía son :

$$\sigma_{\alpha 3}^3 \simeq - (3\underline{\boldsymbol{\kappa}} + 2\underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \left(\underline{\mathbf{Q}} - \frac{h}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right), \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^2 &\simeq \frac{h}{60} (\kappa_1 + \kappa_2) (\sigma^+ + \sigma^-) + \frac{h^2}{10} (\kappa_1 + \kappa_2) f_3 - \frac{1}{h} \underline{\mathbf{M}} : \underline{\boldsymbol{\kappa}} \\ &+ \frac{h}{12} \left[(\kappa_1 + \kappa_2) \left(2\sigma_{33}^1 + \frac{3}{5}\sigma_{33}^3 \right) - \frac{4}{5h}\sigma_{33}^4 \right], \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\sigma_{33}^3 \simeq -N_{11}\kappa_1 - N_{22}\kappa_2 + hf_3 + h(\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \sigma^+ + \sigma^-, \quad (5.106)$$

$$\sigma_{33}^4 \simeq -\frac{15h}{28} (\kappa_1 + \kappa_2) (\sigma^+ + \sigma^- + f_3 h). \quad (5.107)$$

Ahora se pueden realizar los cálculos de las distintas densidades de energía elástica, éstas tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} w_e^{s*} &= \frac{1}{2} \underline{\mathbf{N}}^* : \left[\frac{1}{h} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{N}}^* + \frac{1}{h} \underline{\mathbf{S}} : (\underline{\mathbf{M}}^* \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}) - \frac{1}{h} \underline{\boldsymbol{\kappa}}' \cdot \left(\underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{M}}^* \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{M}}^* : \left[\frac{12}{h^3} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{M}}^* + \frac{1}{h} \underline{\mathbf{S}} : (\underline{\mathbf{N}}^* \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}) - \frac{1}{h} \underline{\boldsymbol{\kappa}}' \cdot \left(\underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{N}}^* \right) \right], \end{aligned} \quad (5.108)$$

$$\begin{aligned}
w_e^{c*} = & \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{N}^*}} : \underline{\underline{\mathbf{S}_e}} \cdot \left(\begin{array}{l} \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + h \left(\frac{4}{15} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{1}{6} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right) (\sigma^+ + \sigma^-) \\ + h \left(\frac{1}{10} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{1}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right) f_3 - \frac{1}{h} \underline{\underline{\mathbf{M}^*}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \end{array} \right) \\
& + \frac{1}{2h} \underline{\underline{\mathbf{M}^*}} : \underline{\underline{\mathbf{S}_e}} \cdot \left(\begin{array}{l} \frac{6}{5} (\sigma^+ + \sigma^-) + h \left(\frac{6}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{1}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} \\ + \frac{1}{5} f_3 - \frac{1}{5} \underline{\underline{\mathbf{N}^*}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \end{array} \right), \quad (5.109)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_e^{Q*} = & \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}^*}} - \frac{h^2}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^+}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^-}}) \right) \cdot \frac{1}{2h} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}^*}} + \frac{h^2}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^+}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^-}}) \right) \\
& + \left(\begin{array}{l} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^+}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^-}} - \left(\frac{3}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{2}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}^*}} \\ + h \left(\frac{3}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{2}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right) \cdot \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^+}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^-}}}{2} \end{array} \right) \cdot \frac{h}{24} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q}} \cdot \left(\begin{array}{l} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^+}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^-}} + \frac{1}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}^*}} \\ + h \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{4}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right) \cdot \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^+}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^-}}}{2} \end{array} \right) \\
& + \left(\begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{Q}^*}} - h \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^+}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^-}}}{2} \\ - \frac{h^2}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^+}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^-}}) \end{array} \right) \cdot \frac{1}{10h} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q}} \cdot \left(\begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{Q}^*}} - h \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^+}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^-}}}{2} \\ - h^2 \left(\frac{1}{6} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{1}{4} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right) (\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^+}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^-}}) \end{array} \right) \quad (5.110)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
w_e^{n*} = & \frac{13h}{70} (\sigma^+ - \sigma^-)^2 + \frac{121h^2}{840} [(\sigma^+)^2 - (\sigma^-)^2] + \frac{17h}{70} \sigma^+ \sigma^- \\
& + \frac{3h}{140} (f_3 - \underline{\underline{\mathbf{N}^*}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) (\sigma^+ + \sigma^-) \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{11hf_3}{105} (\kappa_1 + \kappa_2) - \underline{\underline{\mathbf{M}^*}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \right) (\sigma^+ - \sigma^-) \\
& + \frac{h^2}{210} f_3 \underline{\underline{\mathbf{N}^*}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{(h^3 f_3)^2}{420}. \quad (5.111)
\end{aligned}$$

Finalmente, se tiene la densidad de energía elástica total w_e^* como una función de las fuerzas generalizadas. Procedamos a aplicar el teorema de Reissner, lo que implica derivar w_e^* respecto a las fuerzas generalizadas. La derivación de w_e^* respecto a:

- $\underline{\underline{\mathbf{N}}}^*$ resulta en

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_e^*}{\partial \underline{\underline{\mathbf{N}}}^*} &= \frac{1}{h} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\mathbf{N}}}^* + \frac{1}{h} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : (\underline{\underline{\mathbf{M}}}^* \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) - \frac{1}{h} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}' \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\mathbf{M}}}^* \right) \\
&\quad - \frac{1}{2h} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c \cdot (\underline{\underline{\mathbf{M}}}^* : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) - \frac{1}{10h} (\underline{\underline{\mathbf{M}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{4} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c \\
&\quad + h \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c \cdot \left(\frac{2}{15} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{1}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}' \right) (\sigma^+ + \sigma^-) + \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c h \left(\frac{1}{20} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{1}{24} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}' \right) f_3 \\
&\quad - \frac{3h S_\sigma}{140} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} (\sigma^+ + \sigma^-) - \frac{h^2 S_\sigma}{210} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} f_3; \tag{5.112}
\end{aligned}$$

- $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^*$ conduce a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_e^*}{\partial \underline{\underline{\mathbf{M}}}^*} &= \frac{12}{h^3} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\mathbf{M}}}^* + \frac{1}{h} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : (\underline{\underline{\mathbf{N}}}^* \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) - \frac{1}{h} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}' \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\mathbf{N}}}^* \right) \\
&\quad - \frac{1}{2h} (\underline{\underline{\mathbf{N}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} - \frac{1}{10h} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c \cdot (\underline{\underline{\mathbf{N}}}^* : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) + \frac{3}{5} (\sigma^+ + \sigma^-) \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c \\
&\quad + h \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c \cdot \left(\frac{3}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{1}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}' \right) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \frac{1}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c f_3 \\
&\quad - \frac{S_\sigma}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} (\sigma^+ - \sigma^-); \tag{5.113}
\end{aligned}$$

- $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^*$ produce la expresión

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_e^*}{\partial \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^*} &= \frac{6}{5h} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_Q \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^* - \frac{1}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_Q \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^+ - \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^-) \\
&\quad + \left[\frac{h}{60} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}' \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}_Q - \frac{h}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_Q \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}' \right] \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^+ + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^-). \tag{5.114}
\end{aligned}$$

Entonces, tomando sólo los términos de integrales en ω , el teorema de Reissner implica que se verifiquen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\int_\omega \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^* - \frac{\partial w_e^*}{\partial \underline{\underline{\mathbf{N}}}^*} \right) d\omega = 0, \quad \int_\omega \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^* - \frac{\partial w_e^*}{\partial \underline{\underline{\mathbf{M}}}^*} \right) d\omega = 0 \quad \text{y} \\
\int_\omega \left(\underline{\underline{\mathbf{d}}}^* - \frac{\partial w_e^*}{\partial \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^*} \right) d\omega = 0. \tag{5.115}
\end{aligned}$$

De las igualdades anteriores se deducen las ecuaciones constitutivas generalizadas, las

cuales ligan esfuerzos y deformaciones generalizadas. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \frac{1}{h} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{1}{h} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : (\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) - \frac{1}{h} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\mathbf{M}}} \right) - \frac{1}{2h} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c \cdot (\underline{\underline{\mathbf{M}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) \\ &\quad - \frac{1}{10h} (\underline{\underline{\mathbf{M}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{4} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c + h \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c \cdot \left(\frac{2}{15} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{1}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right) (\sigma^+ + \sigma^-) \\ &\quad + \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c h \left(\frac{1}{20} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{1}{24} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right) f_3 - \frac{3hS_\sigma}{140} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} (\sigma^+ + \sigma^-) - \frac{h^2 S_\sigma}{210} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} f_3, \end{aligned} \quad (5.116)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}} &= \frac{12}{h^3} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\mathbf{M}}} + \frac{1}{h} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : (\underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) - \frac{1}{h} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\mathbf{N}}} \right) - \frac{1}{2h} (\underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \\ &\quad - \frac{1}{10h} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c \cdot (\underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) + \frac{3}{5} (\sigma^+ + \sigma^-) \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c + h \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c \cdot \left(\frac{3}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{1}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} \\ &\quad + \frac{1}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c f_3 - \frac{S_\sigma}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} (\sigma^+ - \sigma^-), \end{aligned} \quad (5.117)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}} = \frac{6}{5h} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_Q \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}} - \frac{1}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_Q \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^+ - \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^-) + \left[\frac{h}{60} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}_Q - \frac{h}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}}}_Q \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'}} \right] \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^+ + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^-). \quad (5.118)$$

Las ecuaciones constitutivas generalizadas también se pueden escribir de forma matricial en términos de los siguientes vectores ingenieriles de fuerzas generalizadas \mathbf{q} y deformaciones generalizadas $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{N}} \\ \widehat{\mathbf{M}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \widehat{\boldsymbol{\chi}} \end{pmatrix}, \quad (5.119)$$

donde

$$\widehat{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ N_{21} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ M_{21} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix}, \quad \text{and } \widehat{\boldsymbol{\chi}} = \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \\ \chi_{21} \end{pmatrix}. \quad (5.120)$$

Las ecuaciones constitutivas pueden ser agrupadas en las siguientes dos ecuaciones vectoriales:

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} + \sigma^+ \mathbf{k}^+ + \sigma^- \mathbf{k}^- + f_3 \mathbf{k}^3, \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \mathbf{L}\underline{\underline{\mathbf{d}}} + \mathbf{L}^+ \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^+ + \mathbf{L}^- \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^-. \end{cases} \quad (5.121)$$

Las expresiones de las matrices (\mathbf{K} , \mathbf{L} , \mathbf{L}^+ and \mathbf{L}^-) y vectores (\mathbf{k}^+ , \mathbf{k}^- y \mathbf{k}^3) en la ecuación anterior son mostradas en el anexo A.

Ahora, concentrémonos en las integrales sobre $\partial\omega_{\mathbf{u}}$ en el funcional de Hellinger-Reissner

de la expresión (5.93). Ahí, resta escribir la integral $\int_{\partial\Omega_{\mathbf{u}}} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{g}} dS$ en función de las fuerzas generalizadas. Al introducir la aproximación de esfuerzos en dicha integral se llega a:

$$\int_{\partial\Omega_{\mathbf{u}}} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{g}} dS = \int_{\partial\omega_{\mathbf{u}}} \left[\begin{aligned} & (\underline{\mathbf{N}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} \begin{pmatrix} u_1^{\mathbf{g}} \\ u_2^{\mathbf{g}} \end{pmatrix} d\xi_3 \\ & + (\underline{\mathbf{M}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \int_{h^-}^{h^+} \frac{12P_1}{h^2} \begin{pmatrix} u_1^{\mathbf{g}} \\ u_2^{\mathbf{g}} \end{pmatrix} d\xi_3 \end{aligned} \right] dl \\ + \int_{\partial\omega_{\mathbf{u}}} \left[(\underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} u_3^{\mathbf{g}} d\xi_3 \right] dl. \quad (5.122)$$

Con el fin de ilustrar mejor la aplicación del teorema de Reissner, escribamos un nuevo funcional auxiliar T' que sólo incluya las integrales sobre $\partial\omega_{\mathbf{u}}$ que aparecen en el funcional T en la ecuación (5.87). Por lo tanto, el funcional T' queda definido como:

$$T' = - \int_{\partial\omega_{\mathbf{u}}} [(\underline{\mathbf{N}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \underline{\mathbf{U}}^* + (\underline{\mathbf{M}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^* + (\underline{\mathbf{Q}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^0) \cdot U_3^*] dl. \quad (5.123)$$

Aplicando el teorema de Reissner con las definiciones en (5.122) y (5.123) se llega a las igualdades:

$$\frac{\partial T'}{\partial \underline{\mathbf{N}}^*} + \frac{\partial}{\partial \underline{\mathbf{N}}^*} \left(\int_{\partial\Omega_{\mathbf{u}}} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{g}} dS \right) = \int_{\partial\omega_{\mathbf{u}}} \left[\int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} \begin{pmatrix} u_1^{\mathbf{g}} \\ u_2^{\mathbf{g}} \end{pmatrix} d\xi_3 - \underline{\mathbf{U}}^* \right] \cdot \underline{\mathbf{n}}^t dl, \quad (5.124)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \underline{\mathbf{Q}}^*} + \frac{\partial}{\partial \underline{\mathbf{Q}}^*} \left(\int_{\partial\Omega_{\mathbf{u}}} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{g}} dS \right) = \int_{\partial\omega_{\mathbf{u}}} \underline{\mathbf{n}}^0 \left[\int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} u_3^{\mathbf{g}} d\xi_3 - U_3^* \right] dl, \quad (5.125)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \underline{\mathbf{M}}^*} + \frac{\partial}{\partial \underline{\mathbf{M}}^*} \left(\int_{\partial\Omega_{\mathbf{u}}} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{g}} dS \right) = \int_{\partial\omega_{\mathbf{u}}} \left[\int_{h^-}^{h^+} \frac{12P_1}{h^2} \begin{pmatrix} u_1^{\mathbf{g}} \\ u_2^{\mathbf{g}} \end{pmatrix} d\xi_3 - \underline{\boldsymbol{\Phi}}^* \right] \cdot \underline{\mathbf{n}}^t dl. \quad (5.126)$$

De las expresiones anteriores se deducen las siguientes condiciones de borde sobre desplazamientos generalizados:

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}^{\mathbf{g}}, \quad U_3 = U_3^{\mathbf{g}} \quad \text{y} \quad \underline{\boldsymbol{\Phi}} = \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathbf{g}}, \quad (5.127)$$

donde

$$\underline{\mathbf{U}}^{\mathbf{g}} = \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} \begin{pmatrix} u_1^{\mathbf{g}} \\ u_2^{\mathbf{g}} \end{pmatrix} d\xi_3, \quad \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathbf{g}} = \int_{h^-}^{h^+} \frac{12P_1}{h^2} \begin{pmatrix} u_1^{\mathbf{g}} \\ u_2^{\mathbf{g}} \end{pmatrix} d\xi_3, \\ U_3^{\mathbf{g}} = \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} u_3^{\mathbf{g}} d\xi_3. \quad (5.128)$$

5.4. Inclusión de términos dinámicos.

Para que el modelo SAM-H pueda ser aplicado en el estudio de fenómenos dinámicos, las aceleraciones deben ser introducidas en las ecuaciones de una manera pertinente. Primero, iniciemos a partir de la idea de que el campo de esfuerzos debe cumplir con la ecuación de movimiento 3D, la cual es:

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho\ddot{\mathbf{u}}. \quad (5.129)$$

Las aproximaciones sobre $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha 3}$ y σ_{33} se proponen con el mismo grado polinomial que en el caso estático; $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha 3}$ y σ_{33} de grado polinomial 2, 4 y 5, respectivamente. En este punto, es necesario proponer una aproximación sobre el campo de desplazamientos. Si se propone una aproximación similar a aquella en (5.67), se puede decir que:

$$\dot{\mathbf{u}}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \begin{pmatrix} \dot{U}_1^*(\xi_1, \xi_2, t)P_0(\xi_3) + h\dot{\Phi}_1^*(\xi_1, \xi_2, t)P_1(\xi_3) \\ \dot{U}_2^*(\xi_1, \xi_2, t)P_0(\xi_3) + h\dot{\Phi}_2^*(\xi_1, \xi_2, t)P_1(\xi_3) \\ \dot{U}_3^*(\xi_1, \xi_2, t)P_0(\xi_3) \end{pmatrix} \quad (5.130)$$

donde los desplazamientos generalizados ahora también dependen del tiempo t . Ambas aproximaciones son introducidas en las ecuaciones de movimiento y realizando un proceso similar a aquel en la sección 5.1 se obtienen los siguientes coeficientes para la aproximación de esfuerzos:

- para $\sigma_{\alpha\beta}^n$ ($0 \leq n \leq 1$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{h} [(\underline{\mathbf{N}} - \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \mathbf{e}_\beta] \cdot \mathbf{e}_\alpha \quad y \\ \sigma_{\alpha\beta}^1 = \left[\left(\frac{12}{h^2} \underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}' \right) \cdot \mathbf{e}_\beta \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha; \end{array} \right. \quad (5.131)$$

- para $\sigma_{\alpha 3}^n$ ($0 \leq n \leq 3$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha 3}^0 = \left[\frac{1}{h} \underline{\mathbf{Q}} - \frac{h}{12} \underline{\mathbf{\kappa}}' \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ \sigma_{\alpha 3}^1 = (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{5} \sigma_{\alpha 3}^3, \\ \sigma_{\alpha 3}^2 = \left[\frac{1}{h} \underline{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) - \frac{h}{12} \underline{\mathbf{\kappa}}' \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \text{y} \\ \sigma_{\alpha 3}^3 = \left[2 \underline{\text{div}} (\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{\kappa}}') - \frac{h^3 \rho (\kappa_1 + \kappa_2)}{6} \underline{\ddot{\Phi}} \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \quad - (4 \underline{\mathbf{\kappa}} + 3 \underline{\mathbf{\kappa}}') \cdot \left(\underline{\mathbf{Q}} - \frac{h}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right) \cdot \mathbf{e}_\alpha; \end{array} \right. \quad (5.132)$$

- para σ_{33}^n ($0 \leq n \leq 4$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{33}^0 = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \sigma_{33}^2 + \frac{1}{15} \sigma_{33}^4, \\ \sigma_{33}^1 = \sigma^+ + \sigma^- + \frac{1}{5} \sigma_{33}^3, \\ \sigma_{33}^2 = \frac{h}{30} \text{div} \left[\underline{\text{div}} (\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{\kappa}}') - 2 \underline{\mathbf{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}} \right] - \frac{1}{h} \underline{\mathbf{M}} : \underline{\mathbf{\kappa}} - \frac{1}{15} \sigma_{33}^4 \\ \quad + \frac{h}{12} \text{div} \left[\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^- + \frac{h}{10} (4 \underline{\mathbf{\kappa}} + 5 \underline{\mathbf{\kappa}}') \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right] \\ \quad + \frac{h}{12} (\kappa_1 + \kappa_2) \left(2 \sigma_{33}^1 - \frac{3}{5} \sigma_{33}^3 + h f_3 - \rho h \ddot{U}_3 \right) \\ \quad - \frac{\rho h^4 (\kappa_1 + \kappa_2)}{360} \text{div} \underline{\ddot{\Phi}} \\ \sigma_{33}^3 = -\text{div} \underline{\mathbf{Q}} + \frac{h}{4} \text{div} \left[2 (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) - h \underline{\mathbf{\kappa}} \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right] \\ \text{y} \\ \sigma_{33}^4 = -\frac{3h}{14} \text{div} \left[\underline{\text{div}} (\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{\kappa}}') \right] + \frac{3h}{7} \text{div} \left[(2 \underline{\mathbf{\kappa}} + \underline{\mathbf{\kappa}}') \cdot \underline{\mathbf{Q}} \right] \\ \quad - \frac{3h^2}{14} \text{div} \left[(2 \underline{\mathbf{\kappa}} + \underline{\mathbf{\kappa}}') \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right] \\ \quad + \frac{\rho h^4 (\kappa_1 + \kappa_2)}{56} \text{div} \underline{\ddot{\Phi}}. \end{array} \right. \quad (5.133)$$

La aproximación definida en (5.130) también es requerida en el cálculo de la energía cinética K mostrada en la ecuación (1.40), dicho cálculo resulta en la siguiente forma de K en función de los desplazamientos generalizados:

$$K = \int_{\omega} \left(\begin{array}{l} \frac{\rho h}{2} (\dot{U}_1^*)^2 + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho h^3}{12} \dot{\Phi}_1^* \dot{U}_1^* \\ + \frac{\rho h}{2} (\dot{U}_2^*)^2 + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho h^3}{12} \dot{\Phi}_2^* \dot{U}_2^* \\ + \frac{\rho h}{2} (\dot{U}_3^*)^2 + \frac{\rho h^3}{24} (\dot{\Phi}_1^*)^2 + \frac{\rho h^3}{24} (\dot{\Phi}_2^*)^2 \end{array} \right) d\omega. \quad (5.134)$$

Tomando la forma de la energía cinética en la ecuación anterior, se pueden afirmar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{U}_\alpha^*} \right) &= \int_{\omega} \left(\rho h \ddot{U}_\alpha^* + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho h^3}{12} \ddot{\Phi}_\alpha^* \right) d\omega, & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{U}_3^*} \right) &= \int_{\omega} \rho h \ddot{U}_3^* d\omega \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\Phi}_\alpha^*} \right) &= \int_{\omega} \left(\frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho h^3}{12} \ddot{U}_\alpha^* + \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\Phi}_\alpha^* \right) d\omega. \end{aligned} \quad (5.135)$$

Las expresiones en (5.135) se aplican en la ecuación de Euler-Lagrange (1.42) y se obtienen las ecuaciones de movimiento generalizadas, las que resultan ser:

$$\underline{\text{div}} \underline{\mathbf{N}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}} + \frac{h}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) + \underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^- + h \underline{\mathbf{f}} = \rho h \ddot{\underline{\mathbf{U}}} + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho h^3}{12} \ddot{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}, \quad (5.136)$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\mathbf{Q}} + h (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \sigma^+ + \sigma^- - \underline{\mathbf{N}} : \underline{\boldsymbol{\kappa}} + h f_3 = \rho h \ddot{U}_3, \quad (5.137)$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{Q}} + \frac{h^2}{4} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) + \frac{h}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \\ + \frac{h^3 (\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \underline{\mathbf{f}} = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho h^3}{12} \ddot{\underline{\mathbf{U}}} + \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}. \end{aligned} \quad (5.138)$$

$\rho h^3 \ddot{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}$ y $\rho h \ddot{U}_3$ aparecen en las expresiones de los coeficientes de esfuerzos en (5.132) y (5.133), es por esto que nos interesa expresar estos términos en función de las fuerzas generalizadas. Evidentemente, de la ecuación (5.137) fácilmente se obtiene $\rho h \ddot{U}_3$ en términos de las fuerzas generalizadas. Para $\rho h^3 \ddot{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}$ se realiza una combinación lineal de las ecuaciones (5.136) y (5.138), y se puede deducir que

$$\begin{aligned} \rho h^3 \ddot{\underline{\boldsymbol{\Phi}}} &= 12 \underline{\text{div}} \underline{\mathbf{M}} - h^2 (\kappa_1 + \kappa_2) \underline{\text{div}} \underline{\mathbf{N}} - 12 \underline{\mathbf{Q}} + \frac{h}{6} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \\ &+ 2h^2 (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-). \end{aligned} \quad (5.139)$$

Los coeficientes de la aproximación de esfuerzos se pueden reescribir utilizando las ecuaciones (5.137) y (5.139) de la siguiente manera:

- para $\sigma_{\alpha\beta}^n$ ($0 \leq n \leq 1$):

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{h} [(\underline{\mathbf{N}} - \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \mathbf{e}_\beta] \cdot \mathbf{e}_\alpha & \text{y} \\ \sigma_{\alpha\beta}^1 = \left[\left(\frac{12}{h^2} \underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}' \right) \cdot \mathbf{e}_\beta \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha; \end{cases} \quad (5.140)$$

- para $\sigma_{\alpha 3}^n$ ($0 \leq n \leq 3$):

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha 3}^0 = \left[\frac{1}{h} \underline{\mathbf{Q}} - \frac{h}{12} \underline{\boldsymbol{\kappa}}' \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ \sigma_{\alpha 3}^1 = (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{5} \sigma_{\alpha 3}^3, \\ \sigma_{\alpha 3}^2 = \left[\frac{1}{h} \underline{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) - \frac{h}{12} \underline{\boldsymbol{\kappa}}' \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \text{y} \\ \sigma_{\alpha 3}^3 = \left[2 \operatorname{div} (\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}') - 2 (\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{div} \underline{\mathbf{M}} \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ + (\kappa_1 + \kappa_2) \left[h (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) - 2 \underline{\mathbf{Q}} \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ - (4 \underline{\boldsymbol{\kappa}} + 3 \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \left(\underline{\mathbf{Q}} - \frac{h}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right) \cdot \mathbf{e}_\alpha; \end{cases} \quad (5.141)$$

- para σ_{33}^n ($0 \leq n \leq 4$):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_{33}^0 = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \sigma_{33}^2 + \frac{1}{15}\sigma_{33}^4, \\
 \sigma_{33}^1 = \sigma^+ + \sigma^- + \frac{1}{5}\sigma_{33}^3, \\
 \sigma_{33}^2 = \frac{h}{30}\operatorname{div} [\underline{\operatorname{div}}(\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}') - 2\underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}] - \frac{1}{h}\underline{\mathbf{M}} : \underline{\boldsymbol{\kappa}} - \frac{1}{15}\sigma_{33}^4 \\
 \quad + \frac{h}{12}\operatorname{div} \left[\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^- + \frac{h}{10}(4\underline{\boldsymbol{\kappa}} + 5\underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \right] \\
 \quad + \frac{h}{12}(\kappa_1 + \kappa_2) \left(\sigma_{33}^1 - \frac{2}{5}\sigma_{33}^3 + \frac{4}{5}\sigma_{33}^4 - \operatorname{div}\underline{\mathbf{Q}} \right) \\
 \quad - \frac{h}{30}\operatorname{div} [(\underline{\boldsymbol{\kappa}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \underline{\operatorname{div}} \underline{\mathbf{M}}] + \frac{h}{30}\operatorname{div} [(\underline{\boldsymbol{\kappa}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \underline{\mathbf{Q}}] \\
 \quad - \frac{h^2}{60}\operatorname{div} [(\underline{\boldsymbol{\kappa}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-)], \\
 \sigma_{33}^3 = -\operatorname{div}\underline{\mathbf{Q}} + \frac{h}{4}\operatorname{div} [2(\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) - h\underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-)] \\
 \text{y} \\
 \sigma_{33}^4 = -\frac{3h}{14}\operatorname{div} [\underline{\operatorname{div}}(\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}')] + \frac{3h}{7}\operatorname{div} [(2\underline{\boldsymbol{\kappa}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \underline{\mathbf{Q}}] \\
 \quad - \frac{3h^2}{14}\operatorname{div} [(2\underline{\boldsymbol{\kappa}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-)] \\
 \quad + \frac{3h}{14}\operatorname{div} [(\underline{\boldsymbol{\kappa}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \underline{\operatorname{div}} \underline{\mathbf{M}}] - \frac{3h}{14}\operatorname{div} [(\underline{\boldsymbol{\kappa}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot \underline{\mathbf{Q}}] \\
 \quad + \frac{3h^2}{28}\operatorname{div} [(\underline{\boldsymbol{\kappa}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}') \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-)].
 \end{array} \right. \quad (5.142)$$

Por último, es de gran importancia señalar que *las deformaciones, ecuaciones constitutivas y condiciones de borde generalizadas del modelo SAM-H dinámico resultantes son las mismas que aquellas del modelo sin tomar en cuenta las aceleraciones.*

Al haber aproximado también el campo de desplazamientos, ya no se puede decir que el modelo es un modelo sobre aproximación de esfuerzos sino más bien un modelo sobre una aproximación mixta, es decir, sobre ambos campos de desplazamientos y esfuerzos. Sin embargo, el modelo seguirá siendo llamado SAM-H debido a que se enfoca en que la aproximación de esfuerzo verifique la ecuación de movimiento 3D. Otro motivo para seguir llamado al modelo SAM-H es que, si uno iguala las aceleraciones a cero, las ecuaciones con términos dinámicos se convierten en las ecuaciones del modelo SAM-H estático.

5.5. Resumen de ecuaciones.

Ecuaciones de movimiento generalizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{N}} + \underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{Q}} + \frac{h}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \\ \quad + \underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^- + h \underline{\mathbf{f}} = \rho h \ddot{\underline{\mathbf{U}}} + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho h^3}{12} \ddot{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}, \\ \underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{Q}} + h (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} + \sigma^+ + \sigma^- - \underline{\mathbf{N}} : \underline{\boldsymbol{\kappa}} + h f_3 = \rho h \ddot{U}_3, \\ \underline{\mathbf{div}} \underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{Q}} + \frac{h^2}{4} (\kappa_1 + \kappa_2) (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) \\ \quad + \frac{h}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ - \underline{\boldsymbol{\tau}}^-) + \frac{h^3 (\kappa_1 + \kappa_2)}{12} \underline{\mathbf{f}} = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho h^3}{12} \ddot{\underline{\mathbf{U}}} + \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}. \end{array} \right. \quad (5.143)$$

Ecuaciones constitutivas generalizadas en forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{q}} = \mathbf{K} \underline{\boldsymbol{\epsilon}} + \sigma^+ \mathbf{k}^+ + \sigma^- \mathbf{k}^- + f_3 \mathbf{k}^3, \\ \underline{\mathbf{Q}} = \mathbf{L} \underline{\mathbf{d}} + \mathbf{L}^+ \underline{\boldsymbol{\tau}}^+ + \mathbf{L}^- \underline{\boldsymbol{\tau}}^-. \end{array} \right. \quad (5.144)$$

Deformaciones generalizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{grad}}^t \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{grad}} \underline{\mathbf{U}}) + \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^\phi \\ \underline{\boldsymbol{\chi}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{grad}} \underline{\boldsymbol{\Phi}} + \underline{\mathbf{grad}}^t \underline{\boldsymbol{\Phi}}) + \underline{\boldsymbol{\chi}}^U, \\ \underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{grad}} U_3 + \underline{\boldsymbol{\Phi}} - \underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\mathbf{U}}. \end{array} \right. \quad (5.145)$$

Condiciones de borde sobre fuerzas generalizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{N}}^g = \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^0, \\ \underline{\mathbf{M}}^g = \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^0, \\ Q^g = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^0. \end{array} \right. \quad (5.146)$$

Condiciones de borde sobre desplazamientos generalizados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}^g, \\ U_3 = U_3^g, \\ \underline{\boldsymbol{\Phi}} = \underline{\boldsymbol{\Phi}}^g. \end{array} \right. \quad (5.147)$$

Capítulo 6

Desarrollo de modelo para cascarones laminados.

En este capítulo, además de las anotaciones del capítulo anterior, se adoptan las anotaciones siguientes:

Notación.

- n es el número total de capas por el cual está conformado el laminado.
- Los subíndices latinos (k, l, p, q) toman los valores 1, 2 y 3.
- ξ_1, ξ_2, ξ_3 denota el sistema global del laminado.
- La base del sistema del laminado está dado por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$; en el sistema cartesiano (x, y, z) esta base se escribe como: $\mathbf{e}_1 = e_{11}\mathbf{e}_x + e_{12}\mathbf{e}_y + e_{13}\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_2 = e_{21}\mathbf{e}_x + e_{22}\mathbf{e}_y + e_{23}\mathbf{e}_z$.
- $\text{div}^i \underline{\mathbf{v}}^i$ es la divergencia 2D en coordenadas de la capa i del laminado de un vector 2D $\underline{\mathbf{v}}^i = v_1^i \mathbf{e}_1 + v_2^i \mathbf{e}_2$ y tiene la siguiente definición:

$$\text{div}^i \underline{\mathbf{v}}^i = \frac{1}{a_1^i a_2^i} \left(\frac{\partial a_2^i v_1^i}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_1^i v_2^i}{\partial \xi_2} \right).$$

- a_1^i y a_2^i son los factores de escala del sistema de coordenadas curvilíneas $(\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1)$ de la capa i .

- $\underline{\underline{\text{div}}}^i \underline{\underline{\mathbf{F}}}^i$ es la divergencia 2D en el sistema de la capa i del laminado del tensor de segundo orden $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^i = F_{\alpha\beta}^i \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ (sumatoria sobre α y β), cuyos componentes son:

$$\underline{\underline{\text{div}}}^i \underline{\underline{\mathbf{F}}}^i = \frac{1}{a_1^i a_2^i} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial a_2^i F_{11}^i}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_1^i F_{12}^i}{\partial \xi_2} + F_{21}^i \frac{\partial a_1^i}{\partial \xi_2} - F_{22}^i \frac{\partial a_2^i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial a_2^i F_{21}^i}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_1^i F_{22}^i}{\partial \xi_2} + F_{12}^i \frac{\partial a_2^i}{\partial \xi_1} - F_{11}^i \frac{\partial a_1^i}{\partial \xi_2} \end{array} \right).$$

- El gradiente 2D en coordenadas de la capa i del laminado de una función escalar 2D s^i es:

$$\underline{\underline{\text{grad}}}^i s^i = \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial s^i}{\partial \xi_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{a_2^i} \frac{\partial s^i}{\partial \xi_2} \mathbf{e}_2.$$

- El gradiente 2D en coordenadas de la capa i del laminado de un vector 2D $\underline{\underline{\mathbf{v}}}^i = v_1^i \mathbf{e}_1 + v_2^i \mathbf{e}_2$ tiene la forma:

$$\underline{\underline{\underline{\text{grad}}}}^i \underline{\underline{\mathbf{v}}}^i = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial v_1^i}{\partial \xi_1} + \frac{v_2^i}{a_1^i a_2^i} \frac{\partial a_1^i}{\partial \xi_2} & \frac{1}{a_2^i} \frac{\partial v_1^i}{\partial \xi_2} - \frac{v_2^i}{a_1^i a_2^i} \frac{\partial a_2^i}{\partial \xi_1} \\ \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial v_2^i}{\partial \xi_1} - \frac{v_1^i}{a_1^i a_2^i} \frac{\partial a_1^i}{\partial \xi_2} & \frac{1}{a_2^i} \frac{\partial v_2^i}{\partial \xi_2} + \frac{v_1^i}{a_1^i a_2^i} \frac{\partial a_2^i}{\partial \xi_1} \end{array} \right).$$

Para facilitar los cálculos en el desarrollo del modelo, se hacen las siguientes suposiciones:

1. Se asumen pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos.
2. El material de cada capa es homogéneo y ortótropo, una de sus direcciones de ortotropía es la dirección 3 del laminado. $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^i$ es el tensor de cuarto orden de complianzas 3D de la capa i , sus componentes son S_{klpq}^i . Cuando se manejan placas y cascarones, es útil definir los siguientes tensores de complianzas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}}^i = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta=1}^2 S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_\delta, \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}_c^i = 2 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 S_{\alpha\beta 33}^i \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta, \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}_Q^i = 4 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 S_{\alpha 3 \beta 3}^i \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \quad \text{y} \quad S_\sigma^i = S_{3333}^i \end{array} \right. \quad (6.1)$$

3. En todos los cálculos los términos $\xi_3 \kappa_\alpha^i$, $h_i \kappa_\alpha^i$ y $\bar{h}_i \kappa_\alpha^i$ se toman en cuenta, pero términos de orden superior ($\xi_3 \kappa_\alpha^i$)^m, ($h_i \kappa_\alpha^i$)^m y ($\bar{h}_i \kappa_\alpha^i$)^m ($m \geq 2$) son despreciados.
4. Las curvaturas de las capas varían suavemente a través de las líneas de curvatura y sus derivadas respecto a ξ_α son despreciables.

5. Para facilitar los cálculos de las complianzas generalizadas, se asume que la divergencia de los vectores de esfuerzos cortantes de interface son cero:

$$\operatorname{div}^i \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} = \operatorname{div}^i \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} = 0. \quad (6.2)$$

6. El vector de fuerzas volumétricas \mathbf{f}^i de la capa i es uniforme en la dirección del espesor.
7. No se aplican restricciones en las caras interior y exterior del laminado sobre los desplazamientos 3D.

6.1. Cascarones laminados.

Este modelo se desarrolla para predecir los esfuerzos en cascarones laminados con doble curvatura. Como su nombre lo dice, el cascarón está conformado por n capas de material ortótropo apiladas una tras otra; la capa número i tiene un espesor uniforme h_i . El espesor total h del laminado es la sumatoria de los espesores de las capas ($h = \sum_{i=1}^n h_i$), y su superficie media ω se ubica en la mitad del espesor h del laminado ($\frac{h}{2}$). Para describir la geometría del laminado se utiliza un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 con origen en la superficie ω . ξ_3 es la coordenada en dirección del espesor h , mientras que ξ_1 y ξ_2 son tangenciales a ω ($\xi_3 = 0$). Al definir los parámetros

$$h^+ = \frac{h}{2} \quad \text{y} \quad h^- = -\frac{h}{2} \quad (6.3)$$

se puede decir que las superficies interior y exterior del laminado son las regiones donde $\xi_3 = h^+$ y $\xi_3 = h^-$, respectivamente. Por lo tanto, el volumen ocupado por el laminado es $\Omega = \omega \times \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$. Los radios de curvatura principales del laminado son R_1 y R_2 , los cuales dependen de los parámetros ξ_1 , ξ_2 ; así, las curvaturas principales del laminado son $\kappa_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{R_1}$ y $\kappa_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{R_2}$. Los coeficientes de Lamé del laminado están dados por:

$$A_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = a_1(1 + \kappa_1 \xi_3), \quad A_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = a_2(1 + \kappa_2 \xi_3) \quad \text{y} \quad A_3 = 1 \quad (6.4)$$

donde $a_1(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{g_{11}}$ y $a_2(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{g_{22}}$; $g_{\alpha\beta}$ son los componentes del tensor métrico de la superficie ω .

Los diferenciales de superficie media y de volumen en el laminado son:

$$d\omega = ds_1 ds_2 \quad \text{y} \quad d\Omega = A_1 A_2 ds_1 ds_2 d\xi_3, \quad (6.5)$$

donde $ds_1 = a_1 d\xi_1$, $ds_2 = a_2 d\xi_1$.

De forma similar al laminado, cada capa i tiene un sistema curvilíneo ortogonal $(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i)$; de forma análoga a el sistema del laminado, ξ_1^i y ξ_2^i son tangenciales a la superficie media ω_i de la capa i . En el sistema del laminado, esta superficie ω_i se encuentra en $\xi_3 = \bar{h}_i$, por lo tanto se puede deducir que $\xi_3^i = \xi_3 - \bar{h}_i$, mientras que los vectores en dirección de las líneas tangenciales de la capa \mathbf{e}_1^i y \mathbf{e}_2^i son equivalentes a los vectores tangenciales a la superficie media \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 . Entonces, los radios principales de la capa i se pueden escribir en función de la superficie media como:

$$R_\alpha^i = R_\alpha + \bar{h}_i. \quad (6.6)$$

Las curvaturas principales de la capa i son $\kappa_\alpha^i = \frac{1}{R_\alpha^i}$; y los coeficientes de Lamé son:

$$A_1^i = a_1^i (1 + \kappa_1^i \xi_3^i), \quad A_2^i = a_2^i (1 + \kappa_2^i \xi_3^i), \quad \text{y} \quad A_3^i = 1. \quad (6.7)$$

Los factores de escala a_α^i pueden deducirse a partir de los coeficientes de Lamé del sistema del laminado de la siguiente manera:

$$a_\alpha^i = A_\alpha(\xi_1, \xi_2, \bar{h}_i) = a_\alpha (1 + \kappa_\alpha \bar{h}_i) \quad (6.8)$$

Introduciendo (6.8) en (6.7), obtenemos los coeficientes de Lamé para la capa i en términos de los factores de escala del laminado:

$$A_1^i = a_1 (1 + \kappa_1 \bar{h}_i + \kappa_1^i \xi_3^i) \quad \text{y} \quad A_2^i = a_2 (1 + \kappa_2 \bar{h}_i + \kappa_2^i \xi_3^i). \quad (6.9)$$

Las superficies interior y exterior de la capa i se encuentran en $\xi_3 = h_i^+$ y $\xi_3 = h_i^-$ respectivamente, estos parámetros están dados por:

$$h_i^+ = \bar{h}_i + \frac{h_i}{2} \quad \text{y} \quad h_i^- = \bar{h}_i - \frac{h_i}{2}. \quad (6.10)$$

Por lo tanto, el volumen que ocupa la capa es $\Omega_i = \omega_i \times [h_i^-; h_i^+]$. En la figura 6.1, se muestra un esquema de un cascarón laminado, donde se aprecian sus capas, las interfaces y el sistema del laminado. En dicha figura, se nota como la superficie interior de la capa i está asociada a la interface $\Gamma_{i-1,i}$ entre la capa $i - 1$ y la capa i ; de forma análoga la

superficie exterior de la capa i está asociada a la interface $\Gamma_{i,i+1}$ entre la capa i y la capa $i + 1$.

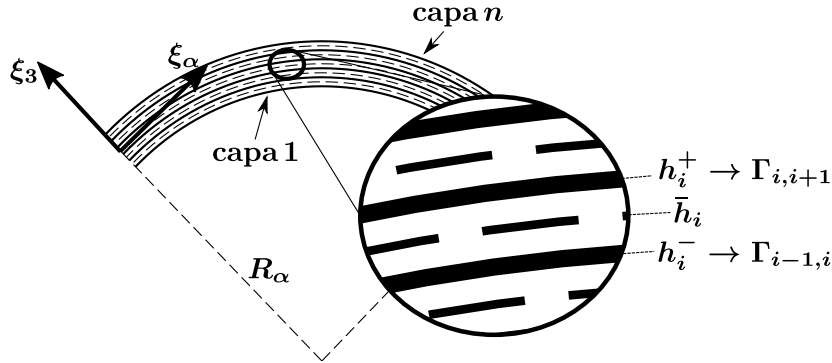


Figura 6.1: Corte transversal en dirección ξ_α del cascarón laminado.

Los diferenciales de superficie media y de volumen de la capa son:

$$d\omega_i = ds_1^i ds_2^i \quad \text{y} \quad d\Omega_i = dS_1^i dS_2^i d\xi_3,$$

donde:

- $dS_\alpha^i = A_\alpha^i ds_\alpha^i = a_\alpha^i (1 + \kappa_\alpha^i \xi_3) ds_\alpha^i$ es el diferencial de arco de la capa i del cascarón laminado.
- $ds_\alpha^i = a_\alpha^i d\xi_\alpha$ es el diferencial de arco en la superficie media de la capa i del cascarón laminado.
- $dl_\alpha^i = a_\alpha^i d\xi_\alpha = a_\alpha (1 + \kappa_\alpha^i \bar{h}_i) d\xi_\alpha$ es el diferencial borde de la superficie media de la capa i del cascarón laminado.

El diferencial de superficie media de la capa i también puede ser escrito en función del diferencial de superficie media del laminado de la siguiente forma:

$$d\omega_i = \bar{J}_i d\omega, \quad (6.11)$$

donde \bar{J}_i puede ser interpretado como un factor de escala de superficie, el cual está dado por:

$$\bar{J}_i = 1 + (\kappa_1 + \kappa_2) \bar{h}_i. \quad (6.12)$$

6.2. Aproximación de los campos de esfuerzos y desplazamientos.

Al igual que el modelo SAM-H, el modelo es construido en base a una aproximación del campo de esfuerzos 3D. Esta aproximación es realizada en cada capa del laminado mediante combinaciones lineales de polinomios de la coordenada ξ_3 . A estos polinomios se les llama la base polinomial de la capa i , la cual se escoge de tal forma que:

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_j^i(\xi_3) P_k^i(\xi_3) d\xi_3 = 0 \quad \text{si } j \neq k. \quad (6.13)$$

Lo cual lleva a la siguiente base polinomial:

$$\begin{aligned} P_0^i(\xi_3) &= 1, & P_1^i(\xi_3) &= \frac{\xi_3 - \bar{h}_i}{h_i}, \\ P_2^i(\xi_3) &= -6 \left(\frac{\xi_3 - \bar{h}_i}{h_i} \right)^2 + \frac{1}{2}, \\ P_3^i(\xi_3) &= -2 \left(\frac{\xi_3 - \bar{h}_i}{h_i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left(\frac{\xi_3 - \bar{h}_i}{h_i} \right), \\ P_4^i(\xi_3) &= -\frac{14}{3} \left(\frac{\xi_3 - \bar{h}_i}{h_i} \right)^4 + \left(\frac{\xi_3 - \bar{h}_i}{h_i} \right)^2 - \frac{1}{40} \quad \text{y} \\ P_5^i(\xi_3) &= \left(\frac{\xi_3 - \bar{h}_i}{h_i} \right)^5 - \frac{5}{18} \left(\frac{\xi_3 - \bar{h}_i}{h_i} \right)^3 + \frac{5}{336} \left(\frac{\xi_3 - \bar{h}_i}{h_i} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

La aproximación de esfuerzos debe de cumplir con la ecuación de movimiento local:

$$\mathbf{div}^i \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v^i = \frac{1}{A_1^i A_2^i A_3^i} (\mathbf{v}_1^i + \mathbf{v}_2^i) + \mathbf{f}_v^i = \mathbf{0} \quad (6.15)$$

en todo punto de la capa i . Los vectores \mathbf{v}_1^i y \mathbf{v}_2^i toman la forma:

$$\mathbf{v}_1^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_2^i A_3^i \sigma_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1^i A_3^i \sigma_{12}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1^i A_2^i \sigma_{13}}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial A_2^i A_3^i \sigma_{21}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1^i A_3^i \sigma_{22}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1^i A_2^i \sigma_{23}}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial A_2^i A_3^i \sigma_{31}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1^i A_3^i \sigma_{32}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1^i A_2^i \sigma_{33}}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{v}_2^i = \begin{pmatrix} \frac{A_2^i}{a_2^i} \frac{\partial A_1^i}{\partial \xi_2} \sigma_{21} - \frac{A_1^i}{a_1^i} \frac{\partial A_2^i}{\partial \xi_1} \sigma_{22} + A_2^i \frac{a_1^i}{R_1^i} \sigma_{31} \\ \frac{A_1^i}{a_1^i} \frac{\partial A_2^i}{\partial \xi_1} \sigma_{12} - \frac{A_2^i}{a_2^i} \frac{\partial A_1^i}{\partial \xi_2} \sigma_{11} + A_1^i \frac{a_2^i}{R_2^i} \sigma_{32} \\ -A_2^i \frac{a_1^i}{R_1^i} \sigma_{11} - A_1^i \frac{a_2^i}{R_2^i} \sigma_{22} \end{pmatrix}; \quad (6.17)$$

El tensor de esfuerzos 3D en la capa i es aproximado de la siguiente manera:

- Esfuerzos en el plano:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sigma_{\alpha\beta}^{0^i}(\xi_1, \xi_2) P_0^i(\xi_3) + \sigma_{\alpha\beta}^{1^i}(\xi_1, \xi_2) P_1^i(\xi_3). \quad (6.18)$$

- Esfuerzos cortantes:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \sigma_{\alpha 3}^{0^i}(\xi_1, \xi_2) P_0^i(\xi_3) + \sigma_{\alpha 3}^{1^i}(\xi_1, \xi_2) P_1^i(\xi_3) \\ & + \sigma_{\alpha 3}^{2^i}(\xi_1, \xi_2) P_2^i(\xi_3) + \sigma_{\alpha 3}^{3^i}(\xi_1, \xi_2) P_3^i(\xi_3). \end{aligned} \quad (6.19)$$

- Esfuerzo normal fuera del plano:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \sigma_{33}^{0^i}(\xi_1, \xi_2) P_0^i(\xi_3) + \sigma_{33}^{1^i}(\xi_1, \xi_2) P_1^i(\xi_3) + \sigma_{33}^{2^i}(\xi_1, \xi_2) P_2^i(\xi_3) \\ & + \sigma_{33}^{3^i}(\xi_1, \xi_2) P_3^i(\xi_3) + \sigma_{33}^{4^i}(\xi_1, \xi_2) P_4^i(\xi_3). \end{aligned} \quad (6.20)$$

donde los coeficientes que multiplican a la base polinomial son funciones de las fuerzas generalizadas de la capa y las fuerzas generalizadas de interface, sus expresiones son mostradas en el anexo B. La aproximación cumple con la ecuación de equilibrio 3D en el orden $(\kappa_\alpha^i h_i)^2$ y con las condiciones de frontera en las caras de las capas.

6.3. Fuerzas generalizadas.

En el modelo SAM-L, las fuerzas generalizadas son definidas en cada capa. $\underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*}$, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*}$ y $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*}$ son las fuerzas de membrana, los momentos y las fuerzas de cortante de la capa i ,

respectivamente. Estas se definen a partir de los esfuerzos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta}^{i*} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}^* \left(1 + (\xi_3 - \bar{h}_i) \kappa_{\bar{\beta}}^i \right) d\xi_3, \\
Q_{\alpha}^{i*} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}^* \left(1 + (\xi_3 - \bar{h}_i) \kappa_{\bar{\alpha}}^i \right) d\xi_3, \\
M_{\alpha\beta}^{i*} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}^* \left(1 + (\xi_3 - \bar{h}_i) \kappa_{\bar{\beta}}^i \right) (\xi_3 - \bar{h}_i) d\xi_3.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Es importante recordar que $\bar{\alpha} = 3 - \alpha$ y $\bar{\beta} = 3 - \beta$. Es evidente que los tensores $\underline{\mathbf{N}}^{i*}$ y $\underline{\mathbf{M}}^{i*}$ son no simétricos si $\kappa_1^i \neq \kappa_2^i$, mientras que el tensor esfuerzos siempre es simétrico. Al introducir la aproximación de esfuerzos en (6.21) se obtiene:

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta}^{i*} &= h_i \sigma_{\alpha\beta}^{0i*} + \frac{h_i^2}{12} \kappa_{\bar{\beta}}^i \sigma_{\alpha\beta}^{1i*}, \\
M_{\alpha\beta}^{i*} &= \frac{h_i^3}{12} \kappa_{\bar{\beta}}^i \sigma_{\alpha\beta}^{0i*} + \frac{h_i^2}{12} \sigma_{\alpha\beta}^{1i*}, \\
Q_{\alpha}^{i*} &= h_i \sigma_{\alpha 3}^{0i*} + \frac{h_i^2}{12} \kappa_{\bar{\alpha}}^i \sigma_{\alpha 3}^{1i*}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Las fuerzas generalizadas en las interfaces son:

- El vector de esfuerzos cortantes $\underline{\boldsymbol{\tau}}^{j,j+1*}$ en la interface $j, j + 1$, sus componentes son $\forall j \in [1, n - 1]$:

$$\tau_{\alpha}^{j,j+1*} = \sigma_{\alpha 3}^*(\xi_1, \xi_2, h_j^+).$$

- el esfuerzo normal en la interface $j, j + 1$ ($1 \leq j \leq n - 1$):

$$\sigma^{j,j+1*} = \sigma_{33}^*(\xi_1, \xi_2, h_j^+).$$

Cabe destacar que cuando $j = 0$:

$$\begin{aligned}
\tau_1^{0,1*}(\xi_1, \xi_2) &= \sigma_{13}^*(\xi_1, \xi_2, -h/2) = -\tau_1^{-*}(\xi_1, \xi_2), \\
\tau_2^{0,1*}(\xi_1, \xi_2) &= \sigma_{23}^*(\xi_1, \xi_2, -h/2) = -\tau_2^{-*}(\xi_1, \xi_2), \\
\sigma^{0,1*}(\xi_1, \xi_2) &= \sigma_{33}^*(\xi_1, \xi_2, -h/2) = -\sigma^{-*}(\xi_1, \xi_2)
\end{aligned} \tag{6.23}$$

donde τ_α^- y σ^- son los esfuerzos cortantes y esfuerzo normal aplicados en la superficie interior del laminado, respectivamente. Para $j = n$:

$$\begin{aligned}\tau_1^{n,n+1*}(\xi_1, \xi_2) &= \sigma_{13}^*(\xi_1, \xi_2, h/2) = \tau_1^{+*}(\xi_1, \xi_2), \\ \tau_2^{n,n+1*}(\xi_1, \xi_2) &= \sigma_{23}(\xi_1, \xi_2, h/2) = \tau_2^{+*}(\xi_1, \xi_2), \\ \sigma^{n,n+1*}(\xi_1, \xi_2) &= \sigma_{33}^*(\xi_1, \xi_2, h/2) = \sigma^{+*}(\xi_1, \xi_2)\end{aligned}\tag{6.24}$$

donde τ_α^+ y σ^+ son los esfuerzos cortantes y esfuerzo normal aplicados en la superficie exterior del laminado, respectivamente.

6.4. Ecuaciones de equilibrio y condiciones de borde sobre las fuerzas.

Las ecuaciones de equilibrio para el modelo SAM-L son obtenidas de una manera similar a aquella presentada en el modelo SAM-H. Se puede decir que en el modelo SAM-L, el cascarón laminado está conformado por un apilado de cascarones homogéneos (estructuras con las que trata el modelo SAM-H), por lo tanto, el volumen total del laminado es la suma del volumen de cada capa. Este hecho se puede expresar matemáticamente como

$$\int_{\Omega} d\Omega = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} d\Omega_i,\tag{6.25}$$

por consiguiente, es válido reescribir el funcional en la ecuación (1.39) bajo la forma de sumatoria

$$\begin{aligned}HR(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} (\mathbf{div}^i \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{u}^* + \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{u}^* + w_e^{i*}) d\Omega_i \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_{\mathbf{u}}^i} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{g}} dS_i + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_{\mathbf{s}}^i} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} - \mathbf{s}^{\mathbf{g}}) \cdot \mathbf{u}^* dS_i.\end{aligned}\tag{6.26}$$

La aplicación del teorema de Reissner requiere realizar una derivación del funcional HR respecto al campo de desplazamientos. Es por esto que se define un funcional T que sólo incluye términos del funcional HR donde interviene el campo \mathbf{u}^* . Entonces, el funcional T tiene la siguiente expresión

$$T(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} (\mathbf{div}^i \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{u}^* + \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{u}^*) d\Omega_i + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_{\mathbf{s}}^i} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} - \mathbf{s}^{\mathbf{g}}) \cdot \mathbf{u}^* dS_i.\tag{6.27}$$

Al introducir la aproximación del campo de esfuerzo 3D en (6.18), (6.19) y (6.20) en el funcional T se obtiene

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = & - \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \left[\begin{array}{l} \underline{\text{div}}^i \underline{\mathbf{N}}^{i*} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i \cdot \underline{\mathbf{Q}}^{i*} + \frac{h_i(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \\ + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*} + h_i \underline{\mathbf{f}}^i \end{array} \right] \cdot \underline{\mathbf{U}}^{i*} d\omega_i \\
& - \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \left[\begin{array}{l} \underline{\text{div}}^i \underline{\mathbf{M}}^{i*} - \underline{\mathbf{Q}}^{i*} + \frac{h_i^2(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{4} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \\ + \frac{h_i}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) + \frac{h_i^3(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{12} \underline{\mathbf{f}}^i \end{array} \right] \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{i*} d\omega_i \\
& - \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \left[\begin{array}{l} \underline{\text{div}}^i \underline{\mathbf{Q}}^{i*} + (\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}) \frac{h_i(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{2} + \sigma^{i,i+1*} \\ - \sigma^{i-1,i*} - N_{11}^{i*} \kappa_1^i - N_{22}^{i*} \kappa_2^i + h_i f_3^i \end{array} \right] U_3^{i*} d\omega_i \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_s^i} (\underline{\mathbf{N}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^i - \underline{\mathbf{F}}^{\text{g}^i}) \cdot \underline{\mathbf{U}}^{i*} dl_i + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_s^i} (\underline{\mathbf{M}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^i - \underline{\mathbf{C}}^{\text{g}^i}) \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^i dl_i \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_s^i} (\underline{\mathbf{Q}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}^i - F_3^{\text{g}^i}) U_3^i dl_i
\end{aligned} \tag{6.28}$$

donde:

- $\underline{\mathbf{U}}^{i*}$, $\underline{\boldsymbol{\Phi}}^{i*}$ y U_3^{i*} son los desplazamientos generalizados del modelo, que se identifican como se hizo en el modelo SAM-H. Sus componentes son:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} U_1^{i*} \\ U_2^{i*} \end{pmatrix} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i}{h_i} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} d\xi_3, & U_3^{i*} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i}{h_i} u_3^* d\xi_3 & \text{y} \\
\begin{pmatrix} \Phi_1^{i*} \\ \Phi_2^{i*} \end{pmatrix} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12P_1^i}{h_i^2} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} d\xi_3. & & &
\end{aligned} \tag{6.29}$$

A diferencia del modelo SAM-H, el cual tiene 5 desplazamientos generalizados, el modelo SAM-L cuenta con $5 \times n$ desplazamientos generalizados, cinco por cada capa del laminado.

- $\underline{\mathbf{n}}^i$ es el vector normal exterior en los bordes 1D de la superficie media ω_i de la capa i ;

- las componentes de los vectores $\underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{g}^i}$ y $\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{g}^i}$ y el escalar $F_3^{\mathbf{g}^i}$ tienen la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\alpha}^{\mathbf{g}^i} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} [P_0^i + h_i ((n_1^i)^2 \kappa_1^i + (n_2^i)^2 \kappa_2^i) P_1^i] s_{\alpha}^{\mathbf{g}^i} d\xi_3, \\ F_3^{\mathbf{g}^i} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} [P_0^i + h_i ((n_1^i)^2 \kappa_1^i + (n_2^i)^2 \kappa_2^i) P_1^i] s_3^{\mathbf{g}^i} d\xi_3 \quad y \\ C_{\alpha}^{\mathbf{g}^i} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{h_i^2}{12} ((n_1^i)^2 \kappa_1^i + (n_2^i)^2 \kappa_2^i) P_0^i(\xi_3) s_{\alpha}^{\mathbf{g}^i} d\xi_3 \\ \quad + \int_{h_i^-}^{h_i^+} h_i P_1^i(\xi_3) \left[1 - \frac{h_i}{6} ((n_1^i)^2 \kappa_1^i + (n_2^i)^2 \kappa_2^i) \right] s_{\alpha}^{\mathbf{g}^i} d\xi_3. \end{array} \right. \quad (6.30)$$

En estas expresiones n_{α}^i son las componentes del vector normal exterior de la capa i , $s_{\alpha}^{\mathbf{g}^i}$ y $s_3^{\mathbf{g}^i}$ son las componentes del vector de esfuerzos 3D en el borde de la capa i .

La estacionariedad del funcional T en la ecuación (6.27) respecto a los desplazamientos generalizados $\underline{\mathbf{U}}^i$, U_3^i y $\underline{\boldsymbol{\Phi}}^i$ arroja las siguientes 5 ecuaciones de equilibrio generalizadas de la capa i :

$$\underline{\mathbf{div}}^i \underline{\mathbf{N}}^i + \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i \cdot \underline{\mathbf{Q}}^i + \frac{h_i(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i}) + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} + h_i \underline{\mathbf{f}}^i = \underline{\mathbf{0}}, \quad (6.31)$$

$$\text{div}^i \underline{\mathbf{Q}}^i + (\sigma^{i,i+1} + \sigma^{i-1,i}) \frac{h_i(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{2} + \sigma^{i,i+1} - \sigma^{i-1,i} - N_{11}^i \kappa_1^i - N_{22}^i \kappa_2^i + h_i f_3^i = 0, \quad (6.32)$$

$$\underline{\mathbf{div}}^i \underline{\mathbf{M}}^i - \underline{\mathbf{Q}}^i + \frac{h_i^2(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{4} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i}) \\ + \frac{h_i^3(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{12} \underline{\mathbf{f}}^i + \frac{h_i}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i}) = \underline{\mathbf{0}}; \quad (6.33)$$

y también las condiciones de frontera sobre los bordes de la capa i :

$$\underline{\mathbf{N}}^i \cdot \underline{\mathbf{n}}^i = \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{g}^i}, \quad \underline{\mathbf{Q}}^i \cdot \underline{\mathbf{n}}^i = F_3^{\mathbf{g}^i}, \quad y \quad \underline{\mathbf{M}}^i \cdot \underline{\mathbf{n}}^i = \underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{g}^i} \quad (6.34)$$

6.5. Deformaciones, ecuaciones constitutivas y condiciones de borde generalizadas sobre desplazamientos.

A fin de identificar las deformaciones generalizadas del modelo, se efectúa una integración por partes sobre los términos de divergencias de fuerzas generalizadas en el funcional T mostrado en la ecuación (6.27). La integración por partes conduce a la siguiente forma de T :

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = & - \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \left[\begin{aligned} & - \underline{\mathbf{N}}^{i*} : \left(\underline{\mathbf{grad}}^i \underline{\mathbf{U}}^{i*} \right)^t \\ & + \left(\underline{\boldsymbol{\kappa}}^i \cdot \underline{\mathbf{Q}}^{i*} + \frac{h_i(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{2} \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*} \right) \right) \cdot \underline{\mathbf{U}}^{i*} \\ & + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} + h_i \underline{\mathbf{f}}^i \end{aligned} \right] d\omega_i \\
& - \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \left[\begin{aligned} & - \underline{\mathbf{M}}^{i*} : \left(\underline{\mathbf{grad}}^i \underline{\boldsymbol{\Phi}}^i \right)^t \\ & + \left(- \underline{\mathbf{Q}}^{i*} + \frac{h_i^2(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{4} \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*} \right) \right) \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^i \\ & + \frac{h_i^3(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{12} \underline{\mathbf{f}}^i + \frac{h_i}{2} \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*} \right) \end{aligned} \right] d\omega_i \\
& - \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \left[\begin{aligned} & - \underline{\mathbf{Q}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{grad}}^i U_3^{i*} \\ & + \left((\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i}) \frac{h_i(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{2} + \sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*} \right) U_3^{i*} \\ & - N_{11}^{i*} \kappa_1^i - N_{22}^{i*} \kappa_2^i + h_i f_3^i \end{aligned} \right] d\omega_i \\
& - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_s^i} \underline{\mathbf{F}}^{\mathbf{g}^i} \cdot \underline{\mathbf{U}}^{i*} dl_i - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_s^i} \underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{g}^i} \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{i*} dl_i - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_s^i} F_3^{\mathbf{g}^i} U_3^{i*} dl_i \\
& - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_u^i} \underline{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}}^i \cdot \underline{\mathbf{U}}^{i*} dl_i - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_u^i} \underline{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}}^i \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{i*} dl_i \\
& - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_u^i} \underline{\mathbf{Q}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}}^i U_3^{i*} dl_i
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Las deformaciones generalizadas son las cantidades que multiplican a las fuerzas generalizadas, por lo tanto, es necesario distinguir entre los esfuerzos de interface, los cuales son fuerzas generalizadas, y los esfuerzos aplicados en las caras del laminado. Es decir, los términos de esfuerzos aplicados en las caras del laminado $\sigma^{0,1}$, $\sigma^{n,n+1}$, $\underline{\boldsymbol{\tau}}^{0,1}$ y $\underline{\boldsymbol{\tau}}^{n,n+1}$ se deben mostrar explícitamente en los funcionales HR y T . Para llevar a cabo esta tarea,

tomemos como ejemplo la integral $\sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \sigma^{i-1,i} a^i d\omega_i$, la cual puede separarse bajo la forma

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \sigma^{i-1,i} a^i d\omega_i = \int_{\omega_1} \sigma^{0,1} a^1 d\omega_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega_{j+1}} \sigma^{j,j+1} a^{j+1} d\omega_{j+1}, \quad (6.36)$$

donde a^i son escalares arbitrarios. Después, aplicando la equivalencia en (6.11) la integral se convierte en

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \sigma^{i-1,i} a^i d\omega_i = \int_{\omega_1} \sigma^{0,1} a^1 d\omega_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \sigma^{j,j+1} a^{j+1} \bar{J}_{j+1} d\omega. \quad (6.37)$$

Asimismo, se pueden afirmar las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \sigma^{i,i+1} b^i d\omega_i = \int_{\omega_n} \sigma^{n,n+1} b^n d\omega_n + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \sigma^{j,j+1} b^j \bar{J}_j d\omega, \quad (6.38)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \underline{\tau}^{i-1,i} \cdot \underline{\mathbf{a}}^i d\omega_i = \int_{\omega_1} \underline{\tau}^{0,1} \cdot \underline{\mathbf{a}}^1 d\omega_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \underline{\tau}^{j,j+1} \cdot \underline{\mathbf{a}}^{j+1} d\omega \quad \text{y} \quad (6.39)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \underline{\tau}^{i,i+1} \cdot \underline{\mathbf{b}}^i d\omega_i = \int_{\omega_n} \underline{\tau}^{n,n+1} \cdot \underline{\mathbf{b}}^n d\omega_n + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \underline{\tau}^{j,j+1} \cdot \underline{\mathbf{b}}^j d\omega, \quad (6.40)$$

donde b^j son escalares arbitrarios; $\underline{\mathbf{a}}^i$ y $\underline{\mathbf{b}}^i$ son tensores de segundo orden 2D cualesquiera. Al aplicar las “propiedades” en (6.37) a (6.40) en el funcional T y agrupando términos se

llega a

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} : (\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{i*})^t d\omega_i + \int_{\omega_i} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} : (\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^{i*})^t d\omega_i + \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{i*}) d\omega_i \\
&+ \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{j,j+1*} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{j,j+1*}) d\omega + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma}^{j,j+1*} (D_n^{j,j+1*}) d\omega \\
&+ \int_{\omega_n} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{n,n+1*} \cdot \left(-\underline{\underline{\mathbf{U}}}^{n*} - \frac{h_n (\kappa_1^n + \kappa_2^n)}{2} \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{n*} - \frac{h_n^2 (\kappa_1^n + \kappa_2^n)}{4} \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^{n*} - \frac{h_n}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^{n*} \right) d\omega_n \\
&+ \int_{\omega_1} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{0,1*} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{U}}}^{1*} - \frac{h_1 (\kappa_1^1 + \kappa_2^1)}{2} \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{1*} + \frac{h_1^2 (\kappa_1^1 + \kappa_2^1)}{4} \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^{1*} - \frac{h_1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^{1*} \right) d\omega_1 \\
&+ \int_{\omega_n} \boldsymbol{\sigma}^{n,n+1} \left(-U_3^{n*} - \frac{h_n (\kappa_1^n + \kappa_2^n)}{2} \right) d\omega_n + \int_{\omega_1} \boldsymbol{\sigma}^{0,1} \left(U_3^{1*} - \frac{h_1 (\kappa_1^1 + \kappa_2^1)}{2} \right) d\omega_1 \\
&- \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \underline{\underline{\mathbf{f}}}^i \cdot \left(h_i \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{i*} + \frac{h_i^3 (\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^{i*} \right) d\omega_i - \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} f_3^i h_i U_3^{i*} d\omega_i \\
&- \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_s^i} \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{\mathbf{g}i} \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{i*} dl_i - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_s^i} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\mathbf{g}i} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^{i*} dl_i - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_s^i} F_3^{\mathbf{g}i} U_3^{i*} dl_i \\
&- \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_{\mathbf{u}}^i} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}^i \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{i*} dl_i - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_{\mathbf{u}}^i} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}^i \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^{i*} dl_i \\
&- \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_{\mathbf{u}}^i} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}^i U_3^{i*} dl_i,
\end{aligned} \tag{6.41}$$

donde $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{i*}$, $\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^{i*}$ y $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{i*}$ son deformaciones generalizadas en la capa i , las cuales están dadas por

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{i*} &= \underline{\underline{\mathbf{grad}}}^i \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{i*} + U_3^{i*} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^{i*} = \underline{\underline{\mathbf{grad}}}^i \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^{i*} \\
\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{i*} &= \underline{\underline{\mathbf{grad}}}^i U_3^{i*} + \underline{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^{i*} - \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{i*};
\end{aligned} \tag{6.42}$$

$D_n^{j,j+1*}$ y $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{j,j+1*}$ son deformaciones generalizadas de la interface j entre las capas j y $j+1$, estas dependen de los desplazamientos generalizados como sigue

$$D_n^{j,j+1*} = \bar{J}_{j+1} \left[1 - \frac{h_{j+1}}{2} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) \right] U_3^{j+1*} - \bar{J}_j \left[1 + \frac{h_j}{2} (\kappa_1^j + \kappa_2^j) \right] U_3^{j*} \quad \text{y} \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}}^{j,j+1*} = & \bar{J}_{j+1} \left[1 - \frac{h_{j+1}}{2} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) \right] \underline{\mathbf{U}}^{j+1*} - \bar{J}_j \left[1 + \frac{h_j}{2} (\kappa_1^j + \kappa_2^j) \right] \underline{\mathbf{U}}^{j*} \\ & - \bar{J}_{j+1} \left[\frac{1}{2} - \frac{h_{j+1}}{4} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) \right] h_{j+1} \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{j+1*} - \bar{J}_j \left[\frac{1}{2} + \frac{h_j}{4} (\kappa_1^j + \kappa_2^j) \right] h_j \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{j*}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

De forma análoga que en el modelo SAM-H, las fuerzas generalizadas N_{21}^{i*} y M_{21}^{i*} se pueden deducir a partir de N_{12}^{i*} y M_{12}^{i*} de la siguiente manera

$$N_{21}^{i*} = N_{12}^{i*} + \delta\kappa^i M_{12}^{i*} \quad \text{y} \quad M_{12}^{i*} = \frac{h_i^2}{12} \delta\kappa^i N_{12}^{i*} + M_{12}^{i*}, \quad (6.45)$$

donde $\delta\kappa^i = \kappa_2^i - \kappa_1^i$. Así que, las deformaciones generalizadas $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i*}$ y $\underline{\boldsymbol{\chi}}^{i*}$ también se pueden escribir bajo las siguientes formas:

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i*} &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}^{it} \underline{\mathbf{U}}^* + \underline{\underline{\text{grad}}}^i \underline{\mathbf{U}}^{i*} \right) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{\Phi}^{i*}} \quad \text{y} \\ \underline{\boldsymbol{\chi}}^{i*} &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}^i \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{i*} + \underline{\underline{\text{grad}}}^{it} \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{i*} \right) + \underline{\boldsymbol{\chi}}^{U^{i*}}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Los tensores de segundo orden $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{\Phi}^{i*}}$ y $\underline{\boldsymbol{\chi}}^{U^{i*}}$ tienen las formas mostradas a continuación:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{\Phi}^{i*}} = \frac{h_i^2 \delta\kappa^i}{12} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_1^i a_2^i} \frac{\partial a_2^i}{\partial \xi_1} \boldsymbol{\Phi}_2^{i*} - \frac{1}{a_2^i} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_1^{i*}}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_2^{i*}}{\partial \xi_1} - \frac{1}{a_1^i a_2^i} \frac{\partial a_1^i}{\partial \xi_2} \boldsymbol{\Phi}_1^{i*} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (6.47)$$

$$\underline{\boldsymbol{\chi}}^{U^{i*}} = \delta\kappa^i \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_1^i a_2^i} \frac{\partial a_2^i}{\partial \xi_1} U_2^{i*} - \frac{1}{a_2^i} \frac{\partial U_1^{i*}}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial U_2^{i*}}{\partial \xi_1} - \frac{1}{a_1^i a_2^i} \frac{\partial a_1^i}{\partial \xi_2} U_1^{i*} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.48)$$

El funcional de Hellinger-Reissner escrito como función de T toma la siguiente forma:

$$HR(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = T(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} w_e^{i*} d\Omega_i + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_i} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{g}} dS_i. \quad (6.49)$$

Trabajemos en el término que involucra la densidad de energía elástica w_e^{i*} de la capa i . Utilizando las definiciones en (6.1), la energía elástica total de la capa i se puede expresar de la forma

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} w_e^{i*} d\omega_i = \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \left(w_e^{s^{i*}} + w_e^{Q^{i*}} + w_e^{c^{i*}} + w_e^{n^{i*}} \right) d\omega_i \quad (6.50)$$

donde

$$\begin{aligned}
w_e^{s_i^*} &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}^* S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \sigma_{\gamma\delta}^* [1 + (\kappa_1^i + \kappa_2^i) \xi_3^i] d\xi_3^i, \\
w_e^{Q_i^*} &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}^* \left(\mathbf{e}_\alpha \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}_Q^i \cdot \mathbf{e}_\beta \right) \sigma_{\beta 3}^* [1 + (\kappa_1^i + \kappa_2^i) \xi_3^i] d\xi_3^i, \\
w_e^{c_i^*} &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}^* \left(\mathbf{e}_\alpha \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c^i \cdot \mathbf{e}_\beta \right) \sigma_{33}^* [1 + (\kappa_1^i + \kappa_2^i) \xi_3^i] d\xi_3^i, \\
w_e^{n_i^*} &= \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{33}^* S_\sigma^i \sigma_{33}^* [1 + (\kappa_1^i + \kappa_2^i) \xi_3^i] d\xi_3^i.
\end{aligned}$$

$w_e^{s_i^*}$, $w_e^{Q_i^*}$, $w_e^{c_i^*}$ y $w_e^{n_i^*}$ son las densidades de energía elástica de la capa i debidas a los esfuerzos en el plano, al esfuerzo normal fuera del plano, a los esfuerzos cortantes fuera del plano y al acoplamiento entre esfuerzos en el plano y el esfuerzo normal fuera del plano, respectivamente. Ahora se introduce la aproximación de esfuerzos en las densidades de energía para obtenerlas como funciones de las fuerzas generalizadas, lo cual conduce a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
w_e^{s_i^*} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} : \left[\frac{1}{h_i} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i : \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} + \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i : \left(\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \right) - \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{i'} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}}^i : \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} : \left[\frac{12}{h_i^3} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i : \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} + \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i : \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \right) - \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{i'} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}}^i : \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} \right) \right], \quad (6.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_e^{c_i^*} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c^i \cdot \left(\frac{\sigma^{i,i+1^*} + \sigma^{i-1,i^*}}{2} + h_i \left(\frac{4}{15} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{1}{6} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{i'} \right) (\sigma^{i,i+1^*} - \sigma^{i-1,i^*}) \right) \\
&\quad + h_i \left(\frac{1}{10} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{1}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{i'} \right) f_3^i - \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \\
&\quad + \frac{1}{2h_i} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c^i \cdot \left(\frac{6}{5} (\sigma^{i,i+1^*} - \sigma^{i-1,i^*}) + h_i \left(\frac{6}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{1}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{i'} \right) \frac{\sigma^{i,i+1^*} + \sigma^{i-1,i^*}}{2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{5} f_3^i - \frac{1}{5} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \quad \Bigg), \quad (6.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_e^{ci*} = & \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i \cdot \left(\frac{\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}}{2} + h_i \left(\frac{4}{15} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{1}{6} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \right) (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) \right) \\
& + h_i \left(\frac{1}{10} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{1}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \right) f_3^i - \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \\
& + \frac{1}{2h_i} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i \cdot \left(\frac{6}{5} (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) + h_i \left(\frac{6}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{1}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \right) \frac{\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}}{2} \right) \\
& + \frac{1}{5} f_3^i - \frac{1}{5} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \Bigg), \tag{6.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_e^{ci*} = & \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i \cdot \left(\frac{\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}}{2} + h_i \left(\frac{4}{15} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{1}{6} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \right) (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) \right) \\
& + h_i \left(\frac{1}{10} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{1}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \right) f_3^i - \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \\
& + \frac{1}{2h_i} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i \cdot \left(\frac{6}{5} (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) + h_i \left(\frac{6}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{1}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \right) \frac{\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}}{2} \right) \\
& + \frac{1}{5} f_3^i - \frac{1}{5} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \Bigg), \tag{6.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_e^{ni*} = & \frac{13h_i}{70} (\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*})^2 + \frac{121h_i^2}{840} [(\sigma^{i,i+1*})^2 - (\sigma^{i-1,i*})^2] - \frac{17h_i}{70} \sigma^{i,i+1*} \sigma^{i-1,i*} \\
& + \frac{3h_i}{140} (f_3^i - \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i) (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{11h_i f_3^i}{105} (\kappa_1^i + \kappa_2^i) - \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \right) (\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}) \\
& + \frac{h_i^2}{210} f_3^i \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{(h_i^3 f_3^i)^2}{420}. \tag{6.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_e^{Qi*} = & \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*} - \frac{h_i^2}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \cdot (\hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}^{i*}) \right) \frac{1}{2h_i} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i_Q \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*} + \frac{h_i^2}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \cdot (\hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}^{i*}) \right) \\
& + \left(\hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}^{i*} - \left(\frac{3}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{2}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*} \right) \cdot \frac{h_i}{24} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i_Q \cdot \left(\hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}^{i*} + \frac{1}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*} \right) \\
& + h_i \left(\frac{3}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{2}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \right) \cdot \hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}^{i*} \Bigg) \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{4}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \right) \cdot \hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}^{i*} \Bigg) \\
& + \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*} - h_i \hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}^{i*} \right) \cdot \frac{1}{10h_i} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^i_Q \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*} - h_i \hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}^{i*} \right) \\
& - \frac{h_i^2}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \cdot (\hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}^{i*}) \cdot \left(-h_i^2 \left(\frac{1}{6} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \frac{1}{4} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{\prime i} \right) (\hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}^{i*}) \right), \tag{6.56}
\end{aligned}$$

donde

$$\hat{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{i*} = \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*} \quad \text{y} \quad \bar{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{i*} = \frac{\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}}{2}. \quad (6.57)$$

Para aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange es necesario derivar la densidad de energía elástica w_e^i respecto a cada una de las fuerzas generalizadas. Para la capa i , resulta:

- derivando respecto a $\underline{\mathbf{N}}^{i*}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_e^{i*}}{\partial \underline{\mathbf{N}}^{i*}} &= \frac{1}{h_i} \underline{\mathbf{S}}^i : \underline{\mathbf{N}}^{i*} + \frac{1}{h_i} \underline{\mathbf{S}}^i : (\underline{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i) - \frac{1}{h_i} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \cdot (\underline{\mathbf{S}}^i : \underline{\mathbf{M}}^{i*}) \\ &\quad - \frac{1}{2h_i} \underline{\mathbf{S}}^i \cdot (\underline{\mathbf{M}}^{i*} : \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i) - \frac{1}{10h_i} (\underline{\mathbf{M}}^{i*} : \underline{\mathbf{S}}^i) \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i + \frac{\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}}{4} \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\underline{c}}} \\ &\quad + h_i \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\underline{c}}} \cdot \left(\frac{2}{15} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i + \frac{1}{12} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right) (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) + \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\underline{c}}} h_i \left(\frac{1}{20} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i + \frac{1}{24} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right) f_3^i \\ &\quad - \frac{3h_i S_{\sigma}^i}{140} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) - \frac{h_i^2 S_{\sigma}^i}{210} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i f_3^i \end{aligned} \quad (6.58)$$

- derivando respecto a $\underline{\mathbf{M}}^{i*}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_e^{i*}}{\partial \underline{\mathbf{M}}^{i*}} &= \frac{12}{h_i^3} \underline{\mathbf{S}}^i : \underline{\mathbf{M}}^{i*} + \frac{1}{h_i} \underline{\mathbf{S}}^i : (\underline{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i) - \frac{1}{h_i} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \cdot (\underline{\mathbf{S}}^i : \underline{\mathbf{N}}^{i*}) \\ &\quad - \frac{1}{2h_i} (\underline{\mathbf{N}}^{i*} : \underline{\mathbf{S}}^i) \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i - \frac{1}{10h_i} \underline{\mathbf{S}}^i \cdot (\underline{\mathbf{N}}^{i*} : \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i) + \frac{3}{5} (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\underline{c}}} \\ &\quad + h_i \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\underline{c}}} \cdot \left(\frac{3}{5} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i + \frac{1}{5} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right) \frac{\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}}{2} + \frac{1}{10} \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\underline{c}}} f_3^i \\ &\quad - \frac{S_{\sigma}^i}{2} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i (\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}). \end{aligned} \quad (6.59)$$

- derivando respecto a $\underline{\mathbf{Q}}^{i*}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_e^{i*}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}^{i*}} &= \frac{6}{5h_i} \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^{i*} - \frac{1}{10} \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\underline{Q}}} \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \\ &\quad + \left[\frac{h_i}{60} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \cdot \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\underline{Q}}} - \frac{h_i}{10} \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right] \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}). \end{aligned} \quad (6.60)$$

- derivando respecto a $\sigma^{i-1,i^*} \forall i \in \{2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_e^{i^*}}{\partial \sigma^{i-1,i^*}} = & S_\sigma^i \left(\left(\frac{13h_i}{35} - \frac{121h_i^2}{420} (\kappa_1^i + \kappa_2^i) \right) \sigma^{i-1,i^*} + \frac{9h_i}{70} \sigma^{i,i+1^*} \right. \\ & \left. + \frac{11h_i^3}{210} (\kappa_1^i + \kappa_2^i) f_3^i - \frac{3h_i^2}{140} \left(f_3^i - \underline{\underline{\mathbf{N}^{i^*}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}^i}} \right) - \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{M}^{i^*}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}^i}} \right) \\ & + \underline{\underline{\mathbf{N}^{i^*}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}_c^i}} \cdot \left(\frac{1}{4} - h_i \left(\frac{2}{15} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}^i}} + \frac{1}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} \right) \right) \\ & + \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\mathbf{M}^{i^*}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}_c^i}} \cdot \left(-\frac{3}{5} + h_i \left(\frac{3}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}^i}} + \frac{1}{10} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.61)$$

- derivando respecto a $\sigma^{i,i+1^*} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_e^{i^*}}{\partial \sigma^{i,i+1^*}} = & S_\sigma^i \left(\left(\frac{13h_i}{35} + \frac{121h_i^2}{420} (\kappa_1^i + \kappa_2^i) \right) \sigma^{i,i+1^*} + \frac{9h_i}{70} \sigma^{i-1,i^*} \right. \\ & \left. + \frac{11h_i^3}{210} (\kappa_1^i + \kappa_2^i) f_3^i + \frac{3h_i^2}{140} \left(f_3^i - \underline{\underline{\mathbf{N}^{i^*}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}^i}} \right) - \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{M}^{i^*}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}^i}} \right) \\ & + \underline{\underline{\mathbf{N}^{i^*}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}_c^i}} \cdot \left(\frac{1}{4} + h_i \left(\frac{2}{15} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}^i}} + \frac{1}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} \right) \right) \\ & + \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\mathbf{M}^{i^*}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}_c^i}} \cdot \left(\frac{3}{5} + h_i \left(\frac{3}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}^i}} + \frac{1}{10} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.62)$$

- derivando respecto a $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^{i-1,i^*}}} \forall i \in \{2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_e^{i^*}}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^{i-1,i^*}}}} = & \left(-\frac{1}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} - \frac{h_i}{60} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} + \frac{h_i}{10} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}^{i^*}}} \\ & + \left[\frac{2h_i}{15} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} - \frac{h_i^2}{12} (\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}^i}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} \right] \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^{i-1,i^*}}} \\ & - \left[\frac{h_i}{30} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} - \left(\frac{h_i}{60} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} - \frac{h_i}{60} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} \right) \right] \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^{i,i+1^*}}} \end{aligned} \quad (6.63)$$

- derivando respecto a $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^{i,i+1^*}}} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_e^{i^*}}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^{i,i+1^*}}}} = & \left(-\frac{1}{10} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} + \frac{h_i}{60} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} - \frac{h_i}{10} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}^{i^*}}} \\ & + \left[\frac{2h_i}{15} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} + \frac{h_i^2}{12} (\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}^i}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} \right] \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^{i,i+1^*}}} \\ & + \left[-\frac{h_i}{30} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} + \left(\frac{h_i}{60} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} - \frac{h_i}{60} \underline{\underline{\mathbf{S}_Q^i}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}'^i}} \right) \right] \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^{i-1,i^*}}} \end{aligned} \quad (6.64)$$

Es importante señalar que las fuerzas generalizadas de interface $i-1, i$ y $i, i+1$ son las mismas cuando $i = j+1$ e $i = j$, respectivamente. Lo que quiere decir que podemos

rescribir

$$\sigma^{i,i+1*} = \sigma^{j,j+1*} \quad \text{si } i = j, \quad (6.65)$$

$$\sigma^{i-1,i*} = \sigma^{j,j+1*} \quad \text{si } i = j + 1, \quad (6.66)$$

$$\underline{\tau}^{i,i+1*} = \underline{\tau}^{j,j+1*} \quad \text{si } i = j \quad \text{y} \quad (6.67)$$

$$\underline{\tau}^{i-1,i*} = \underline{\tau}^{j,j+1*} \quad \text{si } i = j + 1. \quad (6.68)$$

Es así como las derivadas de la energía elástica total en el volumen $\int_{\Omega} w_e^* d\Omega$ respecto a las fuerzas generalizadas $\underline{\tau}^{j,j+1}$ y $\sigma^{j,j+1}$ de la interface j ($\forall j \in \{1, \dots, n-1\}$) están dadas por:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_e^*}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1*}} d\Omega = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega_j} \frac{\partial w_e^{j*}}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1*}} d\omega_j + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega_{j+1}} \frac{\partial w_e^{j+1*}}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1*}} d\omega_{j+1} \quad (6.69)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \left(\bar{J}_j \frac{\partial w_e^{j*}}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1*}} + \bar{J}_{j+1} \frac{\partial w_e^{j+1*}}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1*}} \right) d\omega \quad (6.70)$$

y

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_e^*}{\partial \sigma^{j,j+1*}} d\Omega = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega_j} \frac{\partial w_e^{j*}}{\partial \sigma^{j,j+1*}} d\omega_j + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega_{j+1}} \frac{\partial w_e^{j+1*}}{\partial \sigma^{j,j+1*}} d\omega_{j+1} \quad (6.71)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \left(\bar{J}_j \frac{\partial w_e^{j*}}{\partial \sigma^{j,j+1*}} + \bar{J}_{j+1} \frac{\partial w_e^{j+1*}}{\partial \sigma^{j,j+1*}} \right) d\omega. \quad (6.72)$$

donde $\frac{\partial w_e^{j*}}{\partial \sigma^{j,j+1*}}$ y $\frac{\partial w_e^{j*}}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1*}}$ tienen las mismas connotaciones que en las ecuaciones (6.62) y (6.64); las derivadas de w_e^{j+1*} respecto a las fuerzas de interface están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_e^{j+1*}}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1*}} = & \left(-\frac{1}{10} \underline{\underline{S}}_Q^{j+1} + \frac{h_{j+1}}{60} \underline{\underline{S}}_Q^{j+1} \cdot \underline{\underline{\kappa}}'^{j+1} - \frac{h_{j+1}}{10} \underline{\underline{\kappa}}'^{j+1} \cdot \underline{\underline{S}}_Q^{j+1} \right) \cdot \underline{\underline{Q}}^{j+1*} \\ & + \left[\frac{2h_{j+1}}{15} \underline{\underline{S}}_Q^{j+1} - \frac{h_{j+1}^2}{12} \left(\underline{\underline{\kappa}}'^{j+1} + \underline{\underline{\kappa}}^{j+1} \right) \cdot \underline{\underline{S}}_Q^{j+1} \right] \cdot \underline{\underline{\tau}}^{j,j+1*} \\ & - \left[\frac{h_{j+1}}{30} \underline{\underline{S}}_Q^{j+1} - \left(\frac{h_{j+1}}{60} \underline{\underline{S}}_Q^{j+1} \cdot \underline{\underline{\kappa}}'^{j+1} - \frac{h_{j+1}}{60} \underline{\underline{\kappa}}'^{j+1} \cdot \underline{\underline{S}}_Q^{j+1} \right) \right] \cdot \underline{\underline{\tau}}^{j+1,j+2*} \quad \text{y} \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_e^{j+1*}}{\partial \sigma^{j,j+1*}} = & S_\sigma^{j+1} \left(\begin{aligned} & \left(\frac{13h_{j+1}}{35} - \frac{121h_{j+1}^2}{420} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) \right) \sigma^{j,j+1*} + \frac{9h_{j+1}}{70} \sigma^{j+1,j+2*} \\ & - \frac{3h_{j+1}^2}{140} \left(f_3^{j+1} - \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{j+1*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{j+1} \right) \\ & + \frac{11h_{j+1}^3}{210} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) f_3^{j+1} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{j+1*} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{j+1} \end{aligned} \right) \\
& + \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{j+1*} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c^{j+1} \cdot \left(\frac{1}{4} - h_{j+1} \left(\frac{2}{15} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{j+1} + \frac{1}{12} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^{j+1} \right) \right) \\
& + \frac{1}{h_{j+1}} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{j+1*} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}_c^{j+1} \cdot \left(-\frac{3}{5} + h_{j+1} \left(\frac{3}{5} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{j+1} + \frac{1}{10} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^{j+1} \right) \right). \tag{6.74}
\end{aligned}$$

Con las derivadas anteriores, las derivadas del funcional T respecto a las fuerzas generalizadas y la ecuación de Euler-Lagrange (1.43), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \left((\underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}}^{i*})^t - \frac{\partial w_e^{i**}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*}} \right) d\omega_i = 0, \tag{6.75}$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \left((\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^{i*})^t - \frac{\partial w_e^{i*}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*}} \right) d\omega_i = 0, \tag{6.76}$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{i*} - \frac{\partial w_e^{i*}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*}} \right) d\omega_i = 0, \tag{6.77}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \left(\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{j,j+1*} - \frac{\partial w_e^{j*}}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{j,j+1}} \bar{J}_j - \frac{\partial w_e^{j+1*}}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{j,j+1}} \bar{J}_{j+1} \right) d\omega = 0, \tag{6.78}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \left(D_n^{j,j+1*} - \frac{\partial w_e^{j*}}{\partial \sigma^{j,j+1*}} \bar{J}_j - \frac{\partial w_e^{j+1*}}{\partial \sigma^{j,j+1*}} \bar{J}_{j+1} \right) d\omega = 0. \tag{6.79}$$

Por lo tanto, se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
(\underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}}^i)^t &= \frac{\partial w_e^{j**}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{i*}}, & (\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^i)^t &= \frac{\partial w_e^{j*}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{i*}}, & \underline{\underline{\mathbf{d}}}^i &= \frac{\partial w_e^{i*}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{i*}}, \\
\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{j,j+1*} &= \frac{\partial w_e^{i*}}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{j,j+1}} \bar{J}_j + \frac{\partial w_e^{i+1*}}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{j,j+1}} \bar{J}_{j+1}, & y & & D_n^{j,j+1*} &= \frac{\partial w_e^{j*}}{\partial \sigma^{j,j+1*}} \bar{J}_j + \frac{\partial w_e^{j+1*}}{\partial \sigma^{j,j+1*}} \bar{J}_{j+1}. \tag{6.80}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, las ecuaciones constitutivas generalizadas en términos de las fuerzas

generalizadas:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^i &= \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\underline{S}}}^i : \underline{\underline{\underline{N}}}^i + \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\underline{S}}}^i : (\underline{\underline{\underline{M}}}^i : \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i) - \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i \cdot (\underline{\underline{\underline{S}}}^i : \underline{\underline{\underline{M}}}^i) \\
&\quad - \frac{1}{2h_i} \underline{\underline{\underline{S}}}^i \cdot (\underline{\underline{\underline{M}}}^i : \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i) - \frac{1}{10h_i} (\underline{\underline{\underline{M}}}^i : \underline{\underline{\underline{S}}}^i) \cdot \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i + \frac{\sigma^{i,i+1} + \sigma^{i-1,i}}{4} \underline{\underline{\underline{S}}}^i \\
&\quad + h_i \underline{\underline{\underline{S}}}^i \cdot \left(\frac{2}{15} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i + \frac{1}{12} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i \right) (\sigma^{i,i+1} - \sigma^{i-1,i}) + \underline{\underline{\underline{S}}}^i h_i \left(\frac{1}{20} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i + \frac{1}{24} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i \right) f_3^i \\
&\quad - \frac{3h_i S_\sigma^i}{140} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i (\sigma^{i,i+1} - \sigma^{i-1,i}) - \frac{h_i^2 S_\sigma^i}{210} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i f_3^i,
\end{aligned} \tag{6.81}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{\chi}}}^i &= \frac{12}{h_i^3} \underline{\underline{\underline{S}}}^i : \underline{\underline{\underline{M}}}^i + \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\underline{S}}}^i : (\underline{\underline{\underline{N}}}^i : \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i) - \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i \cdot (\underline{\underline{\underline{S}}}^i : \underline{\underline{\underline{N}}}^i) \\
&\quad - \frac{1}{2h_i} (\underline{\underline{\underline{N}}}^i : \underline{\underline{\underline{S}}}^i) \cdot \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i - \frac{1}{10h_i} \underline{\underline{\underline{S}}}^i \cdot (\underline{\underline{\underline{N}}}^i : \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i) + \frac{3}{5} (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) \underline{\underline{\underline{S}}}^i \\
&\quad + h_i \underline{\underline{\underline{S}}}^i \cdot \left(\frac{3}{5} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i + \frac{1}{5} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i \right) \frac{\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}}{2} + \frac{1}{10} \underline{\underline{\underline{S}}}^i f_3^i \\
&\quad - \frac{S_\sigma^i}{2} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i (\sigma^{i,i+1} + \sigma^{i-1,i}),
\end{aligned} \tag{6.82}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{d}}}^i &= \frac{6}{5h_i} \underline{\underline{\underline{S}}}^i \cdot \underline{\underline{\underline{Q}}}^i - \frac{1}{10} \underline{\underline{\underline{S}}}^i \cdot (\underline{\underline{\underline{\tau}}}^{i,i+1} + \underline{\underline{\underline{\tau}}}^{i-1,i}) \\
&\quad + \left[\frac{h_i}{60} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^i - \frac{h_i}{10} \underline{\underline{\underline{S}}}^i \cdot \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^i \right] \cdot (\underline{\underline{\underline{\tau}}}^{i,i+1*} - \underline{\underline{\underline{\tau}}}^{i-1,i*}),
\end{aligned} \tag{6.83}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{D}}}^{j,j+1} &= \bar{J}_{j+1} \left(-\frac{1}{10} \underline{\underline{\underline{S}}}^{j+1} + \frac{h_{j+1}}{60} \underline{\underline{\underline{S}}}^{j+1} \cdot \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{\prime j+1} - \frac{h_{j+1}}{10} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{\prime j+1} \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^{j+1} \right) \cdot \underline{\underline{\underline{Q}}}^{j+1} \\
&\quad + \bar{J}_{j+1} \left[\frac{2h_{j+1}}{15} \underline{\underline{\underline{S}}}^{j+1} - \frac{h_{j+1}^2}{12} (\underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{\prime j+1} + \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{j+1}) \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^{j+1} \right] \cdot \underline{\underline{\underline{\tau}}}^{j,j+1} \\
&\quad - \bar{J}_{j+1} \left[\frac{h_{j+1}}{30} \underline{\underline{\underline{S}}}^{j+1} - \left(\frac{h_{j+1}}{60} \underline{\underline{\underline{S}}}^{j+1} \cdot \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{\prime j+1} - \frac{h_{j+1}}{60} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{\prime j+1} \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^{j+1} \right) \right] \cdot \underline{\underline{\underline{\tau}}}^{j+1,j+2} \\
&\quad + \bar{J}_j \left(-\frac{1}{10} \underline{\underline{\underline{S}}}^j + \frac{h_j}{60} \underline{\underline{\underline{S}}}^j \cdot \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{\prime j} - \frac{h_j}{10} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{\prime j} \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^j \right) \cdot \underline{\underline{\underline{Q}}}^j \\
&\quad + \bar{J}_j \left[\frac{2h_j}{15} \underline{\underline{\underline{S}}}^j + \frac{h_j^2}{12} (\underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{\prime j} + \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^j) \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^j \right] \cdot \underline{\underline{\underline{\tau}}}^{j,j+1} \\
&\quad + \bar{J}_j \left[-\frac{h_j}{30} \underline{\underline{\underline{S}}}^j + \left(\frac{h_j}{60} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{\prime j} \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^j - \frac{h_j}{60} \underline{\underline{\underline{S}}}^j \cdot \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{\prime j} \right) \right] \cdot \underline{\underline{\underline{\tau}}}^{j-1,j},
\end{aligned} \tag{6.84}$$

$$\begin{aligned}
D_n^{j,j+1} = & \bar{J}_{j+1} S_\sigma^{j+1} \left(\begin{aligned} & \left(\frac{13h_{j+1}}{35} - \frac{121h_{j+1}^2}{420} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) \right) \sigma^{j,j+1} + \frac{9h_{j+1}}{70} \sigma^{j+1,j+2} \\ & + \frac{11h_{j+1}^3}{210} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) f_3^{j+1} \\ & - \frac{3h_{j+1}^2}{140} (f_3^{j+1} - \underline{\mathbf{N}}^{j+1} : \underline{\boldsymbol{\kappa}}^{j+1}) - \frac{1}{2} \underline{\mathbf{M}}^{j+1} : \underline{\boldsymbol{\kappa}}^{j+1} \end{aligned} \right) \\
& + \bar{J}_{j+1} \underline{\mathbf{N}}^{j+1} : \underline{\mathbf{S}}_c^{j+1} \cdot \left(\frac{1}{4} - h_{j+1} \left(\frac{2}{15} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^{j+1} + \frac{1}{12} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^{j+1} \right) \right) \\
& + \bar{J}_{j+1} \frac{1}{h_{j+1}} \underline{\mathbf{M}}^{j+1} : \underline{\mathbf{S}}_c^{j+1} \cdot \left(-\frac{3}{5} + h_{j+1} \left(\frac{3}{5} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^{j+1} + \frac{1}{10} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^{j+1} \right) \right) \\
& + \bar{J}_j S_\sigma^j \left(\begin{aligned} & \left(\frac{13h_j}{35} + \frac{121h_j^2}{420} (\kappa_1^j + \kappa_2^j) \right) \sigma^{i,i+1*} + \frac{9h_j}{70} \sigma^{i-1,i*} \\ & + \frac{11h_j^3}{210} (\kappa_1^j + \kappa_2^j) f_3^j + \frac{3h_j^2}{140} (f_3^j - \underline{\mathbf{N}}^{j*} : \underline{\boldsymbol{\kappa}}^j) - \frac{1}{2} \underline{\mathbf{M}}^{j*} : \underline{\boldsymbol{\kappa}}^j \end{aligned} \right) \\
& + \bar{J}_j \underline{\mathbf{N}}^{j*} : \underline{\mathbf{S}}_c^j \cdot \left(\frac{1}{4} + h_j \left(\frac{2}{15} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^j + \frac{1}{12} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^j \right) \right) \\
& + \bar{J}_j \frac{1}{h_j} \underline{\mathbf{M}}^{j*} : \underline{\mathbf{S}}_c^j \cdot \left(\frac{3}{5} + h_j \left(\frac{3}{5} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^j + \frac{1}{10} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^j \right) \right).
\end{aligned} \tag{6.85}$$

La ecuación (1.43) resulta en las siguientes condiciones de borde sobre los desplazamientos generalizados:

$$\underline{\mathbf{U}}^i = \underline{\mathbf{U}}^{\mathbf{g}^i}, \quad U_3^i = U_3^{\mathbf{g}^i} \quad \text{y} \quad \underline{\boldsymbol{\Phi}}^i = \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathbf{g}^i}; \tag{6.86}$$

donde $\underline{\mathbf{U}}^{\mathbf{g}^i}$, $U_3^{\mathbf{g}^i}$ y $\underline{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathbf{g}^i}$ son los desplazamientos en el plano, el desplazamiento fuera del plano y el vector de rotaciones impuestos en los bordes del cascaron, respectivamente. Los componentes de de estos campos son:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{U}}^{\mathbf{g}^i} = & \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} \begin{pmatrix} u_1^{\mathbf{g}^i} \\ u_2^{\mathbf{g}^i} \end{pmatrix} d\xi_3, & \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathbf{g}^i} = & \int_{h^-}^{h^+} \frac{12P_1}{h^2} \begin{pmatrix} u_1^{\mathbf{g}^i} \\ u_2^{\mathbf{g}^i} \end{pmatrix} d\xi_3, \\
U_3^{\mathbf{g}^i} = & \int_{h^-}^{h^+} \frac{P_0}{h} u_3^{\mathbf{g}^i}.
\end{aligned} \tag{6.87}$$

6.6. Resumen de ecuaciones.

Ecuaciones de movimiento generalizadas (Las aceleraciones fueron introducidas a las ecuaciones SAM-L de la misma manera que se hizo para SAM-H):

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}}^i \underline{\mathbf{N}}^i + \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i \cdot \underline{\mathbf{Q}}^i + \frac{h_i(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i}) \\ \quad + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} + h_i \underline{\mathbf{f}}^i = \rho_i h_i \ddot{\underline{\mathbf{U}}}^i + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \rho_i h_i^3}{12} \ddot{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^i, \\ \underline{\text{div}}^i \underline{\mathbf{Q}}^i + (\sigma^{i,i+1} + \sigma^{i-1,i}) \frac{h_i(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{2} + \sigma^{i,i+1} - \sigma^{i-1,i} \\ \quad - N_{11}^i \kappa_1^i - N_{22}^i \kappa_2^i + h_i f_3^i = \rho_i h_i \ddot{U}_3^i, \\ \underline{\text{div}}^i \underline{\mathbf{M}}^i - \underline{\mathbf{Q}}^i + \frac{h_i^2(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{4} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i}) \\ \quad + \frac{h_i^3(\kappa_1^i + \kappa_2^i)}{12} \underline{\mathbf{f}}^i + \frac{h_i}{2} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i}) = \rho_i h_i \ddot{\underline{\mathbf{U}}}^i + \frac{(\kappa_1^i + \kappa_2^i) \rho_i h_i^3}{12} \ddot{\underline{\boldsymbol{\Phi}}}^i. \end{array} \right. \quad (6.88)$$

Ecuaciones de comportamiento generalizadas en la capa i:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i = \frac{1}{h_i} \underline{\mathbf{S}}^i : \underline{\mathbf{N}}^i + \frac{1}{h_i} \underline{\mathbf{S}}^i : (\underline{\mathbf{M}}^i \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i) - \frac{1}{h_i} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \cdot (\underline{\mathbf{S}}^i : \underline{\mathbf{M}}^i) \\ \quad - \frac{1}{2h_i} \underline{\mathbf{S}}^i \cdot (\underline{\mathbf{M}}^i : \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i) - \frac{1}{10h_i} (\underline{\mathbf{M}}^i : \underline{\mathbf{S}}^i) \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i + \frac{\sigma^{i,i+1} + \sigma^{i-1,i}}{4} \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\mathbf{c}}} \\ \quad + h_i \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\mathbf{c}}} \cdot \left(\frac{2}{15} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i + \frac{1}{12} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right) (\sigma^{i,i+1} - \sigma^{i-1,i}) + \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\mathbf{c}}} h_i \left(\frac{1}{20} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i + \frac{1}{24} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right) f_3^i \\ \quad - \frac{3h_i S_{\sigma}^i}{140} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i (\sigma^{i,i+1} - \sigma^{i-1,i}) - \frac{h_i^2 S_{\sigma}^i}{210} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i f_3^i \\ \underline{\boldsymbol{\chi}}^i = \frac{12}{h_i^3} \underline{\mathbf{S}}^i : \underline{\mathbf{M}}^i + \frac{1}{h_i} \underline{\mathbf{S}}^i : (\underline{\mathbf{N}}^i \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i) - \frac{1}{h_i} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \cdot (\underline{\mathbf{S}}^i : \underline{\mathbf{N}}^i) \\ \quad - \frac{1}{2h_i} (\underline{\mathbf{N}}^i : \underline{\mathbf{S}}^i) \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i - \frac{1}{10h_i} \underline{\mathbf{S}}^i \cdot (\underline{\mathbf{N}}^i : \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i) + \frac{3}{5} (\sigma^{i,i+1*} - \sigma^{i-1,i*}) \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\mathbf{c}}} \\ \quad + h_i \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\mathbf{c}}} \cdot \left(\frac{3}{5} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i + \frac{1}{5} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right) \frac{\sigma^{i,i+1*} + \sigma^{i-1,i*}}{2} + \frac{1}{10} \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\mathbf{c}}} f_3^i \\ \quad - \frac{S_{\sigma}^i}{2} \underline{\boldsymbol{\kappa}}^i (\sigma^{i,i+1} + \sigma^{i-1,i}). \\ \underline{\mathbf{d}}^i = \frac{6}{5h_i} \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^i - \frac{1}{10} \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i}) \\ \quad + \left[\frac{h_i}{60} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \cdot \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\mathbf{Q}}} - \frac{h_i}{10} \underline{\mathbf{S}}^i_{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right] \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}). \end{array} \right. \quad (6.89)$$

Ecuaciones de comportamiento en le interface $j,j+1$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \underline{D}^{j,j+1} = \bar{J}_{j+1} \left(-\frac{1}{10} \underline{S}_Q^{j+1} + \frac{h_{j+1}}{60} \underline{S}_Q^{j+1} \cdot \underline{\kappa}'^{j+1} - \frac{h_{j+1}}{10} \underline{\kappa}'^{j+1} \cdot \underline{S}_Q^{j+1} \right) \cdot \underline{Q}^{j+1} \\
 + \bar{J}_{j+1} \left[\frac{2h_{j+1}}{15} \underline{S}_Q^{j+1} - \frac{h_{j+1}^2}{12} (\underline{\kappa}'^{j+1} + \underline{\kappa}^{j+1}) \cdot \underline{S}_Q^{j+1} \right] \cdot \underline{\tau}^{j,j+1} \\
 - \bar{J}_{j+1} \left[\frac{h_{j+1}}{30} \underline{S}_Q^{j+1} - \left(\frac{h_{j+1}}{60} \underline{S}_Q^{j+1} \cdot \underline{\kappa}'^{j+1} - \frac{h_{j+1}}{60} \underline{\kappa}'^{j+1} \cdot \underline{S}_Q^{j+1} \right) \right] \cdot \underline{\tau}^{j+1,j+2} \\
 + \bar{J}_j \left(-\frac{1}{10} \underline{S}_Q^j + \frac{h_j}{60} \underline{S}_Q^j \cdot \underline{\kappa}'^j - \frac{h_j}{10} \underline{\kappa}'^j \cdot \underline{S}_Q^j \right) \cdot \underline{Q}^j \\
 + \bar{J}_j \left[\frac{2h_j}{15} \underline{S}_Q^j + \frac{h_j^2}{12} (\underline{\kappa}'^j + \underline{\kappa}^j) \cdot \underline{S}_Q^j \right] \cdot \underline{\tau}^{j,j+1} \\
 + \bar{J}_j \left[-\frac{h_j}{30} \underline{S}_Q^j + \left(\frac{h_j}{60} \underline{\kappa}'^j \cdot \underline{S}_Q^j - \frac{h_j}{60} \underline{S}_Q^j \cdot \underline{\kappa}'^j \right) \right] \cdot \underline{\tau}^{j-1,j} \\
 \\
 \underline{D}_n^{j,j+1} = \bar{J}_{j+1} \underline{S}_\sigma^{j+1} \left(\begin{array}{l}
 \left(\frac{13h_{j+1}}{35} - \frac{121h_{j+1}^2}{420} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) \right) \sigma^{j,j+1} + \frac{9h_{j+1}}{70} \sigma^{j+1,j+2} \\
 + \frac{11h_{j+1}^3}{210} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) f_3^{j+1} \\
 - \frac{3h_{j+1}^2}{140} (f_3^{j+1} - \underline{N}^{j+1} : \underline{\kappa}^{j+1}) - \frac{1}{2} \underline{M}^{j+1} : \underline{\kappa}^{j+1} \\
 + \bar{J}_{j+1} \underline{N}^{j+1} : \underline{S}_c^{j+1} \cdot \left(\frac{1}{4} - h_{j+1} \left(\frac{2}{15} \underline{\kappa}^{j+1} + \frac{1}{12} \underline{\kappa}'^{j+1} \right) \right) \\
 + \bar{J}_{j+1} \frac{1}{h_{j+1}} \underline{M}^{j+1} : \underline{S}_c^{j+1} \cdot \left(-\frac{3}{5} + h_{j+1} \left(\frac{3}{5} \underline{\kappa}^{j+1} + \frac{1}{10} \underline{\kappa}'^{j+1} \right) \right) \\
 + \bar{J}_j \underline{S}_\sigma^j \left(\begin{array}{l}
 \left(\frac{13h_j}{35} + \frac{121h_j^2}{420} (\kappa_1^j + \kappa_2^j) \right) \sigma^{i,i+1*} + \frac{9h_j}{70} \sigma^{i-1,i*} \\
 + \frac{11h_j^3}{210} (\kappa_1^j + \kappa_2^j) f_3^j + \frac{3h_j^2}{140} (f_3^j - \underline{N}^{j*} : \underline{\kappa}^j) - \frac{1}{2} \underline{M}^{j*} : \underline{\kappa}^j \\
 + \bar{J}_j \underline{N}^{j*} : \underline{S}_c^j \cdot \left(\frac{1}{4} + h_j \left(\frac{2}{15} \underline{\kappa}^j + \frac{1}{12} \underline{\kappa}'^j \right) \right) \\
 + \bar{J}_j \frac{1}{h_j} \underline{M}^{j*} : \underline{S}_c^j \cdot \left(\frac{3}{5} + h_j \left(\frac{3}{5} \underline{\kappa}^j + \frac{1}{10} \underline{\kappa}'^j \right) \right) .
 \end{array} \right)
 \end{array} \right)
 \end{array} \right. \quad (6.90)$$

Deformaciones generalizadas en la capa i:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^i = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{grad}}}^{it} \underline{\mathbf{U}}^* + \underline{\underline{\mathbf{grad}}}^i \underline{\mathbf{U}}^i \right) + \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\Phi^i}, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^i = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{grad}}}^i \underline{\boldsymbol{\Phi}}^i + \underline{\underline{\mathbf{grad}}}^{it} \underline{\boldsymbol{\Phi}}^i \right) + \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}^{U^i}, \\ \underline{\underline{\mathbf{d}}}^i = \underline{\underline{\mathbf{grad}}}^i U_3^i + \underline{\boldsymbol{\Phi}}^i. \end{cases} \quad (6.91)$$

Deformaciones generalizadas en la interface j,j+1:

$$\begin{cases} D_n^{j,j+1} = \bar{J}_{j+1} \left[1 - \frac{h_{j+1}}{2} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) \right] U_3^{j+1} - \bar{J}_j \left[1 + \frac{h_j}{2} (\kappa_1^j + \kappa_2^j) \right] U_3^j & \text{y} \\ \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{j,j+1} = \bar{J}_{j+1} \left[1 - \frac{h_{j+1}}{2} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) \right] \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{j+1} - \bar{J}_j \left[1 + \frac{h_j}{2} (\kappa_1^j + \kappa_2^j) \right] \underline{\underline{\mathbf{U}}}^j \\ \quad - \bar{J}_{j+1} \left[\frac{1}{2} - \frac{h_{j+1}}{4} (\kappa_1^{j+1} + \kappa_2^{j+1}) \right] h_{j+1} \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{j+1} \\ \quad - \bar{J}_j \left[\frac{1}{2} + \frac{h_j}{4} (\kappa_1^j + \kappa_2^j) \right] h_j \underline{\boldsymbol{\Phi}}^j. \end{cases} \quad (6.92)$$

Condiciones de borde sobre fuerzas generalizadas en la capa i:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^i \cdot \underline{\mathbf{n}}^i = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{g^i}, \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^i \cdot \underline{\mathbf{n}}^i = F_3^{g^i}, \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}}^i \cdot \underline{\mathbf{n}}^i = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{g^i} \end{cases} \quad (6.93)$$

Condiciones de borde sobre desplazamientos generalizados en la capa i:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{U}}}^i = \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{g^i}, \\ U_3^i = U_3^{g^i}, \\ \underline{\boldsymbol{\Phi}}^i = \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{g^i}. \end{cases} \quad (6.94)$$

Se debe de señalar, que para el modelo SAM-L no se presentan las ecuaciones de comportamiento en forma matricial. Esto se debe a que el número de ecuaciones de comportamiento depende del número de capas, lo que dificulta la inversión de matrices de forma simbólica. Para escribir las fuerzas generalizadas en función de las deformaciones generalizadas se debe recurrir a una inversión de las matrices numérica.

Capítulo 7

Validación, resultados y discusión.

7.1. Resultados analíticos del modelo SAM-H para una esfera hueca presurizada.

En esta sección, la precisión de las soluciones analíticas de los modelos CS y SAM-H para el problema de una esfera presurizada internamente son comparadas. En el problema mecánico de una esfera hueca presurizada, se reduce la dependencia de las ecuaciones de la mecánica del medio continuo a una sola variable de espacio (problema 1D dependiente la coordenada radial). Asimismo, las ecuaciones de los modelos CS y SAM-H se reducen a un problema 0 D. Cabe destacar que, para una geometría esférica, los radios de curvatura principales son iguales al radio de la esfera ($R_1 = R_2 = R$), lo cual implica que $\eta = h/R$. Se proponen dos estudios, uno estático y otro dinámico, de cascarones esféricos con una presión p aplicada en su cara interior. En ambos estudios, el cascarón tiene un espesor h y un radio R ; el material es isótropo con módulo de Young E , coeficiente de Poisson ν y densidad ρ . El vector en dirección del espesor \mathbf{e}_3 apunta desde adentro hacia afuera de la esfera.

En lo que sigue, haremos referencia a las distintas teorías por las siglas:

- 3D para solución analítica de mecánica del medio continuo;
- SFE para solución numérica empleado elementos finitos sólidos (cabe señalar que se trata de una solución que converge);
- CS para modelo clásico de cascarones;
- SAM-H para el modelo desarrollado en este trabajo.

7.1.1. Estudio estático.

El desplazamiento y esfuerzo normal resultantes del modelo SAM-H son:

$$\begin{cases} U_3^{SAM} = U_3^{CS} - \frac{pR}{E} \left(\frac{1-2\nu}{2} + \frac{3}{140}\eta + \frac{13\nu}{30}\eta + \frac{\nu}{10}\eta^2 \right) & \text{y} \\ \sigma_{33}^{SAM}(\bar{\xi}_3) = p \left(-\frac{1-\eta}{2} + \bar{\xi}_3 - 2\bar{\xi}_3^2\eta + \frac{\eta^2}{8} - \frac{\eta^2\bar{\xi}_3^2}{2} \right), \end{cases} \quad (7.1)$$

donde $\eta = \frac{h}{R}$ es la proporción espesor a radio y $\bar{\xi}_3 = \frac{\xi_3}{h}$ es la posición normalizada a través del espesor. Para las ecuaciones del modelo CS se obtienen las siguientes expresiones del desplazamiento radial y el esfuerzo normal:

$$U_3^{CS} = \frac{pR}{E} \left[\frac{1-\nu}{2\eta} \right] \quad \text{y} \quad \sigma_{33}^{CS} = 0. \quad (7.2)$$

La solución analítica del problema utilizando ecuaciones 3D tiene las siguientes expresiones para el desplazamiento radial (u_3) y el esfuerzo normal σ_{33} :

$$\begin{cases} u_3^{3D}(\bar{\xi}_3) = \frac{pR}{E} \left[\frac{(1-\frac{\eta}{2})^3 \left(2(1-2\nu)(1+\eta\bar{\xi}_3)^3 + (1+\nu)(1+\frac{\eta}{2})^3 \right)}{2 \left((1+\frac{\eta}{2})^3 - (1-\frac{\eta}{2})^3 \right) (1+\eta\bar{\xi}_3)^2} \right] & \text{y} \\ \sigma_{33}^{3D}(\bar{\xi}_3) = p \frac{(1-\frac{\eta}{2})^3}{(1+\frac{\eta}{2})^3 - (1-\frac{\eta}{2})^3} \left(1 - \left(\frac{1+\frac{\eta}{2}}{1+\eta\bar{\xi}_3} \right)^3 \right), \end{cases} \quad (7.3)$$

En el modelo SAM-H se tiene la expresión (5.65) que relaciona al desplazamiento generalizado fuera del plano con el desplazamiento normal 3D u_3 . Por lo tanto, es necesario aplicar dicha ecuación a la solución analítica 3D para poder comparar resultados. Al introducir (7.3) en (5.65) se obtiene el siguiente desplazamiento promedio en el espesor de la esfera

$$\begin{aligned} U_3^{3D} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{P_0}{h} u_3^{3D} \left(\frac{\xi_3}{h} \right) d\xi_3 \\ &= \frac{pR}{E} \left[\frac{2(1-\frac{\eta}{2})^3(1-2\nu) + (1-\frac{\eta}{2})^2(1+\frac{\eta}{2})^2(1+\nu)}{2 \left((1+\frac{\eta}{2})^3 - (1-\frac{\eta}{2})^3 \right)} \right]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Definamos los errores relativos para las teorías SAM-H y CS

$$\delta U_3^{SAM} = \frac{U_3^{SAM} - U_3^{3D}}{U_3^{3D}} \quad \text{y} \quad \delta U_3^{CS} = \frac{U_3^{CS} - U_3^{3D}}{U_3^{3D}} \quad (7.5)$$

en la evaluación del desplazamiento promedio para los modelos CS y SAM-H. Estos errores solo dependen de los valores de η y ν . En las Figuras 7.1 (a) y 7.1 (b), se muestra cómo los cambios en η afectan en la precisión de la predicción del modelo SAM-H para cinco valores del coeficiente de Poisson ν (-0.4, -0.2, 0, 0.2 y 0.4). Para este caso, se barre el valor de la relación η en un rango de 0 a 0.5; el valor de 0.5 corresponde a un cascarón de radio $R = 1$ m y un espesor $h = 0.5$ m. Se dice que un cascarón es moderadamente grueso si su relación η es menor a 0.3, lo cual se justifica a continuación. En el gráfico, se puede observar cómo el error relativo aumenta a medida que el cascarón se vuelve más grueso y ν aumenta, pero siempre es menor a 4% para $\eta = 0.3$ y a 14% para el caso más grueso ($\eta = 0.5$). Por lo tanto, se asigna este valor $\eta = 0.3$ a los cascarones moderadamente gruesos para que el error en sus predicciones sea menor a 10%. Por otro lado, se muestra que, en el caso de los cascarones más gruesos, el error relativo del modelo CS se dispara más arriba del 100% y para los cascarones moderadamente gruesos está por arriba del 50%. Por lo tanto, se puede decir que el modelo SAM-H es altamente superior al modelo CS en cuanto al cálculo de desplazamiento normal se refiere. En la figura 7.2, se gráfica el resultado del modelo SAM-H sin tomar en cuenta la energía de acoplamiento w_e^c en función de la relación η para los diferentes valores del coeficiente de Poisson. Se puede observar que si se desprecia el efecto de Poisson normal-planar el error relativo del desplazamiento se dispara hasta un 20%, lo que es 5 veces mayor que aquel en donde si se toma en cuenta este efecto (4%). Es así como se demuestra la importancia de tomar en cuenta el efecto del esfuerzo normal fuera del plano sobre las deformaciones en el plano.

Hagamos un análisis sobre los resultados del esfuerzo normal fuera del plano obtenidos por la teoría SAM-H. Para el modelo CS, el esfuerzo σ_{33} es cero, mientras que el modelo SAM-H sí tiene la capacidad de predecirlo. Tanto el esfuerzo normal fuera del plano normalizado σ_{33}/p obtenido mediante las ecuaciones SAM-H como el de las ecuaciones 3D para tres diferentes relaciones radio/espesor ($\eta=0.1, 0.3, 0.5$) contra la posición normalizada en el espesor $\bar{\xi}_3 = \frac{\xi_3}{h}$ son graficadas en la figura 7.3. En el gráfico, se percibe como mientras que la relación η se hace más grande la calidad de la predicción hecha por el modelo SAM-H disminuye. A pesar de esto, los resultados del modelo SAM-H tienen una buena precisión aún para el caso del cascarón más grueso. Además, el gráfico muestra como la aproximación del modelo SAM-H verifica las condiciones de frontera en las caras

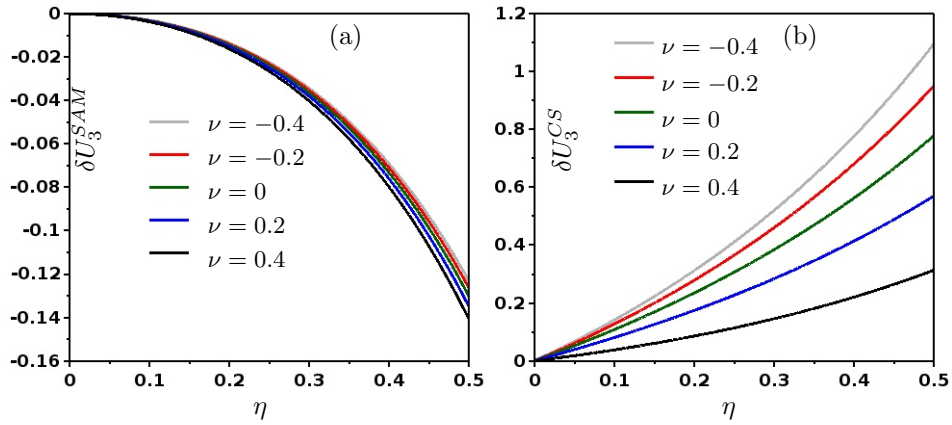


Figura 7.1: Error relativo del desplazamiento vs relación $\eta = \frac{h}{R}$ para los modelos SAM-H (a) y CS (b).

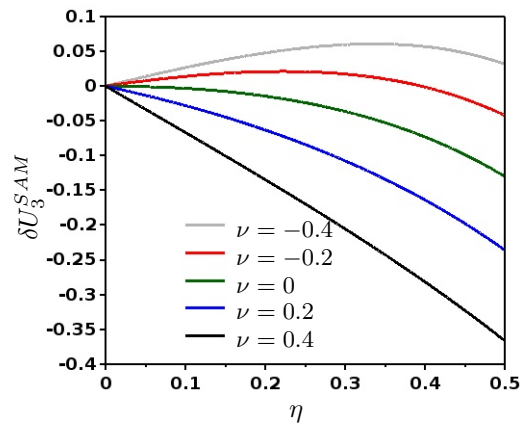


Figura 7.2: Error relativo del desplazamiento vs relación radio a espesor del modelo SAM-H sin tomar en cuenta la energía w_e^c .

interior ($\bar{\xi}_3 = -1/2$) y exterior del cascarón ($\bar{\xi}_3 = 1/2$).

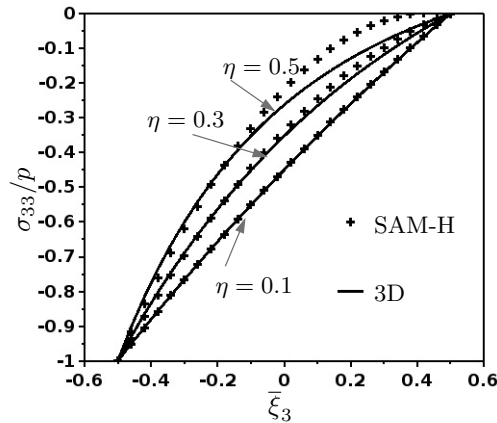


Figura 7.3: Esfuerzos SAM-H y 3D normalizados vs $\frac{\sigma_{33}}{p}$ vs posición adimensional $\bar{\xi}_3$.

7.1.2. Estudio dinámico.

En este estudio, la presión es una función armónica $p = p_0 \sin(2\pi \bar{f} t)$, donde p_0 y \bar{f} son respectivamente la amplitud de la presión interna y la frecuencia de excitación. El primer problema que se propone resolver es el de frecuencias naturales que pueden ser excitadas por una dicha presión. Con un modelo sólido se pueden obtener infinitos valores de frecuencias propias para el problema descrito. Por su parte, los modelos SAM-H y CS sólo pueden encontrar un valor de frecuencia propia, el cual resulta ser idéntico para ambos modelos

$$f^{\text{SAM-H}} = f^{\text{CS}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{\rho R^2(1-\nu)}}. \quad (7.6)$$

Esta frecuencia natural es la correspondiente a la frecuencia fundamental f_1 calculada a partir del modelo 3D. Las frecuencias mayores a f_1 son debidas a vibraciones que no pueden ser reproducidas por los modelos CS y SAM-H debido a su simplicidad en el campo de desplazamientos. Para hacer un estudio de la respuesta dinámica de la estructura sometida a la presión p , basta con obtener la frecuencia fundamental y el modo de vibración asociado. La frecuencia fundamental considerando a la esfera como un sólido es obtenida con el software COMSOL. Se define, para ambos modelos, el error relativo en el cálculo de la frecuencia fundamental como:

$$\delta f_1 = \frac{f^{\text{SAM-H}} - f_1}{f_1}. \quad (7.7)$$

En la figura 7.4, se grafica el error relativo delta f_1 contra la relación espesor/radio para 5 valores del coeficiente ν . Se puede ver que incluso para cascarones moderadamente gruesos el error de ambos modelos está por debajo del 1.5% independientemente del valor de ν . Se puede decir que ambos modelos son precisos en el cálculo de la frecuencia fundamental f_1 . Es importante señalar que estas curvas no dependen del módulo de Young ni de la densidad ρ .

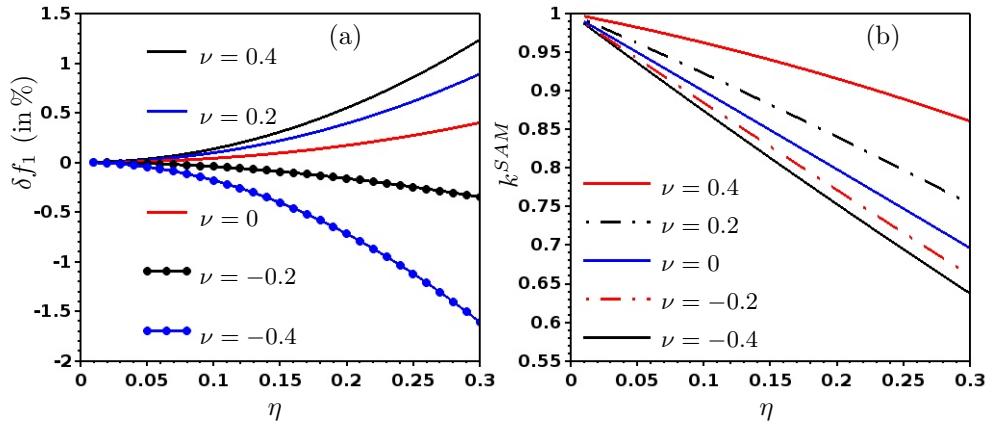


Figura 7.4: Error relativo δf_1 vs relación de espesor a radio (a) y factor de corrección vs relación de espesor a radio (b).

Ahora realizamos un análisis frecuencial de vibraciones forzadas aplicando la presión armónica p . La amplitud del desplazamiento radial resultante de las ecuaciones CS está dado por

$$U_3^{CS} = \frac{p_0 R}{\eta} \left[\frac{1 - \nu}{2E - \rho \underline{\omega}^2 R^2 (1 - \nu)} \right], \quad (7.8)$$

Donde $\underline{\omega} = 2\pi \underline{f}$ es la frecuencia angular de excitación. El modelo SAM-H brinda la siguiente expresión de la amplitud de desplazamiento radial:

$$U_3^{SAM} = k^{SAM} \times U_3^{CS} \quad (7.9)$$

Donde k^{SAM} se puede interpretar como un factor de corrección del modelo SAM-H para mejorar la predicción de la amplitud del desplazamiento radial del modelo CS; la expresión del factor de corrección k^{SAM} es

$$k^{SAM} = 1 - \eta - q^- \quad \text{donde} \\ q^- = 2\eta \frac{45\eta - 1050\nu + 865\eta\nu - 1414\eta\nu^2 + 1050\nu^2}{2100(1 - \nu)^2}. \quad (7.10)$$

El término η que aparece en esta expresión se debe a que en el modelo SAM-H los esfuerzos

aplicados en las caras aparecen directamente en las ecuaciones de equilibrio. Sucede algo semejante con el término q^- , ya que está presente en la expresión de k^{SAM} porque el esfuerzo normal aplicado en las caras del cascarón también se toma en cuenta en las ecuaciones de comportamiento del modelo SAM-H. En la figura 7.4b, se grafica el factor de corrección k^{SAM} para cascarones con relación $\eta \in [0, 0.3]$ y diferentes coeficientes de Poisson ν . En este gráfico, se observa claramente cómo para cascarones muy delgados ($\eta \leq 0.01$) el modelo SAM-H no realiza corrección alguna ($k^{SAM} \simeq 1$) pero para cascarones moderadamente gruesos ($\eta = 0.3$) el factor de corrección es alto y debe de ser tomado en cuenta, especialmente para coeficientes de Poisson menores a cero. Esto reafirma la idea de la importancia de tomar en cuenta la energía de acoplamiento w_e^c .

Ahora consideremos una esfera con los siguientes parámetros y propiedades: $R = 1$ m, $\eta = 0.3$, $\rho = 1000$ kg/m³, $E = 1$ GPa, $\nu = -0.4$. Como se muestra en la figura 7.4, corresponde al caso donde se deben de hacer más notorias las diferencias entre los modelos SAM-H y CS. La presión interna se toma como $p_0 = 1$ kPa. En la figura 7.5a, se trazan las curvas de amplitudes del desplazamiento radial contra la frecuencia de excitación obtenidas por los modelos 2D y elementos finitos sólidos. El rango de las frecuencias se escoge de tal forma que sólo se incluya la primera frecuencia propia de la esfera. A una frecuencia de 130 Hz, los errores relativos respecto a la solución SFE de los modelos SAM-H y CS son de -5.1 % y 49.5 %, respectivamente. Recordemos que SFE se refiere a la solución numérica obtenida en COMSOL empleando elementos finitos sólidos. Además de este valor numérico del error, en la figura se aprecia fácilmente la superioridad del modelo SAM-H sobre el modelo CS en cuanto a la predicción de la amplitud del desplazamiento se refiere. En ambos modelos para cascarones, el pico en la amplitud del desplazamiento radial ocurre a una frecuencia $\bar{f} = 190$ Hz. En el diseño estructural, por razones de seguridad, es una práctica común evitar el fenómeno de resonancia asegurándose que la frecuencia propia de la estructura sea lo suficientemente mayor a la frecuencia de excitación. Supongamos entonces que la frecuencia de excitación está por debajo de la frecuencia propia calculada por el modelo SAM-H en por lo menos 20 %. Dicho lo anterior, las amplitudes de los esfuerzos σ_{11} en la superficie media vs la frecuencia de excitación para CS, SAM-H y SFE son graficadas en la figura 7.5b. Así como sucedió con las amplitudes del desplazamiento radial, el modelo SAM-H también muestra ser mejor que el modelo CS en el cálculo de la amplitud del esfuerzo en el plano σ_{11} . En esa misma figura, también se muestran las curvas de amplitud del esfuerzo normal fuera del plano σ_{33} vs \bar{f} de los modelos SAM-H y SFE. Resaltemos de nuevo, que no hay una curva del modelo CS ya que considera desde su concepción un $\sigma_{33} = 0$. Para ambos esfuerzos σ_{11} y σ_{33} , se puede decir que la

aproximación realizada por del modelo SAM-H es de buena calidad. En la figura 7.6, se traza el perfil del esfuerzo normal σ_{33} en la dirección del espesor para dos frecuencias de excitación: 50 Hz y 150 Hz. Se puede observar que ambos perfiles se asemejan bastante a aquellos de la solución SFE.

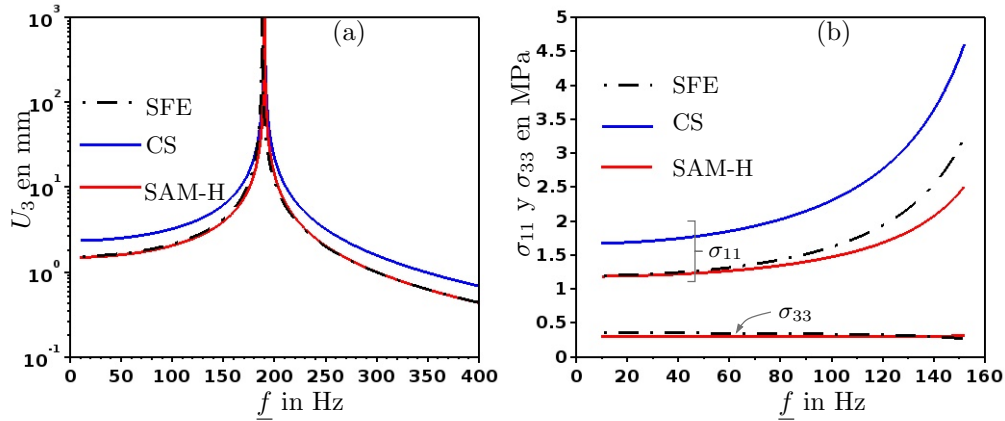


Figura 7.5: Amplitud de desplazamiento vs frecuencia de excitación (a); amplitudes de esfuerzos σ_{11} y σ_{33} vs frecuencia de excitación (b). Resultados CS, SAM-H y SFE.

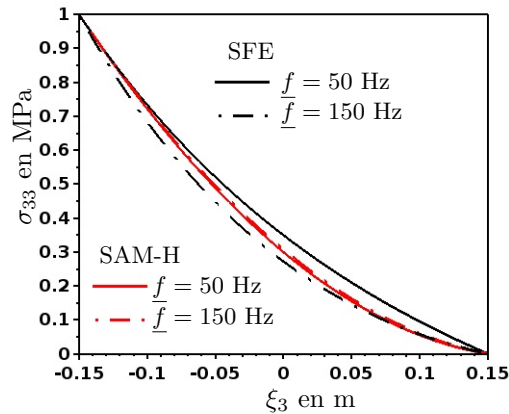


Figura 7.6: Amplitud σ_{33} vs ξ_3 (resultados SAM-H y SFE results).

El problema de la esfera presurizada demostró que los modelos SAM-H y CS obtienen la misma predicción de la frecuencia fundamental en la coordenada radial. Sin embargo, el modelo SAM-H hace una mejor aproximación de las amplitudes de desplazamientos y esfuerzos en un análisis frecuencial.

7.2. Resultados analíticos del modelo SAM-L para una esfera hueca presurizada.

En esta sección, se propone el mismo problema que en la sección 7.1, con la intención de resolverlo utilizando la teoría SAM-L. Para lograr este objetivo, la esfera se modela como un cascarón laminado de dos capas homogéneas y espesor $h/2$ cada una, cómo se muestra en la figura 7.7 . Los resultados de la teoría SAM-L son comparadas con aquellos de los modelos SAM-H y CS tomando como punto de referencia las soluciones analíticas y numéricas 3D.

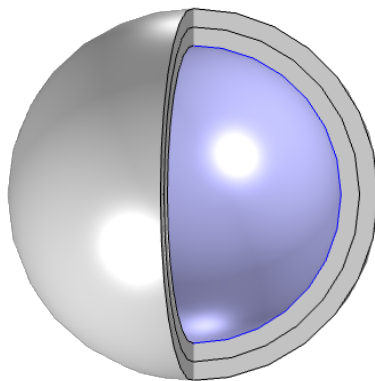


Figura 7.7: Esfera presurizada modelada como un laminado de dos capas homogéneas.

7.2.1. Estudio estático.

Las formas obtenidas por las ecuaciones SAM-L de los desplazamientos radiales en la capa interna y externa son

$$\begin{aligned}
 U_3^{SAM-L1} &= \frac{Rp}{4E\eta} (2R - 3\eta - 2R\nu + 6\eta\nu + R^2\eta - R^2\eta\nu) \quad \text{y} \\
 U_3^{SAM-L2} &= \frac{Rp}{4E\eta} (2R - 2\eta - 2R\nu + 3\eta\nu),
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

respectivamente. La solución analítica en (7.3) de las ecuaciones 3D producen los siguientes desplazamientos promedio de las capas 1 y 2:

$$\begin{aligned} U_3^{3D1} &= \int_{h_1^-}^{h_1^+} \frac{P_0^1}{h_1} u_3^{3D} \left(\frac{\xi_3 - \bar{h}_1}{h_1} \right) d\xi_3 \\ &= \frac{Rp (\eta - 2)^2}{16 E \eta (\eta^2 + 12)} (24 \eta \nu - 12 \eta + C) \quad y \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} U_3^{3D2} &= \int_{h_2^-}^{h_2^+} \frac{P_0^2}{h_2} u_3^{3D} \left(\frac{\xi_3 - \bar{h}_2}{h_2} \right) d\xi_3 \\ &= -\frac{Rp (\eta - 2)^3 (-24 \eta \nu + 12 \eta + C)}{16 E \eta (\eta^3 + 2 \eta^2 + 12 \eta + 24)} \end{aligned} \quad (7.13)$$

donde $C = -4 \eta^2 \nu + 2 \eta^2 + \nu^4 + 7 \nu^3 + 18 \nu^2 - 12 \nu + 24$. Se definen los errores relativos en el cálculo del desplazamiento radial en cada capa mediante las formulas

$$\delta U_3^{SAM-L1} = \frac{U_3^{SAM-L1} - U_3^{3D1}}{U_3^{3D1}} \quad y \quad \delta U_3^{SAM-L2} = \frac{U_3^{SAM-L2} - U_3^{3D2}}{U_3^{3D2}} \quad (7.14)$$

Estos errores se grafican en la figura 7.8 donde también se muestra la curva del error relativo SAM-H definido en la ecuación (7.5). En dicha figura, se puede observar cómo incluso para el cascarón moderadamente grueso el error del modelo SAM-L es menor que aquel del modelo SAM-H. El error del modelo SAM-L, para ambas capas, no sobrepasa del 3% mientras que para el modelo SAM-H llega a un nivel de hasta el 14 por ciento. La precisión más alta que presenta el modelo SAM-L se debe a los términos que se desprecian en su concepción. Las cantidades despreciadas son las que se multiplican por $\eta_i^2 = (h_i/R_i)^2$ y de $\eta = (h/R)^2$ para los modelos SAM-L y SAM-H, respectivamente. Hagamos un análisis de lo que esto conlleva. Supongamos que se divide la esfera en n capas homogéneas del mismo espesor $h_i = h/n$, entonces:

$$\eta_i^2 = \left(\frac{h}{nR_i} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left(\frac{h}{R_i} \right)^2 \frac{R^2}{R^2} = \frac{\eta^2}{n^2} \left(\frac{R}{R_i} \right)^2. \quad (7.15)$$

En esta ecuación se observa como η_i^2 es proporcional a $1/n^2$, es decir a medida que se aumente el valor n el error disminuirá drásticamente. Lo que se puede observar en la figura 7.8, con $n = 2$ el error de SAM-L es mucho más bajo que el de SAM-H. Se puede interpretar esta división en n capas como un “mallado” en dirección del espesor. Por lo tanto, el modelo SAM-L es una gran alternativa para obtener resultados más precisos que modelos para cascarones homogéneos en lugar de recurrir a SFE. Ahora realicemos

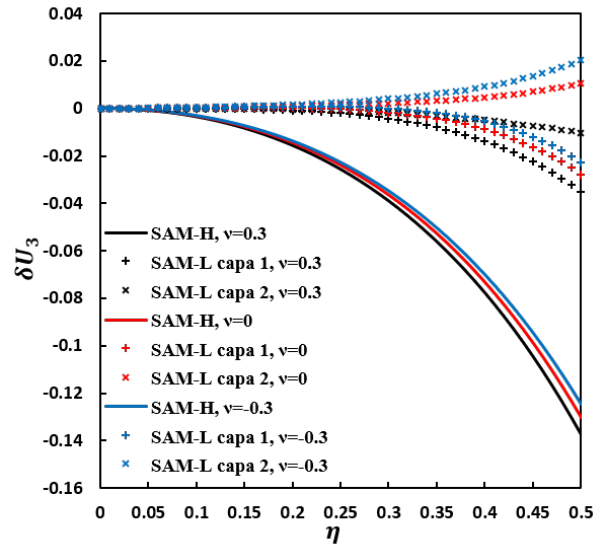


Figura 7.8: Errores relativos del desplazamiento radial vs relación radio a espesor η para tres valores de ν .

un análisis sobre los resultados del esfuerzo normal fuera del plano. La solución de este esfuerzo para la capa 1 y para la capa 2 tienen las formas

$$\sigma_{33}^1 = \sigma_{33}^{01} P_0^1 + \sigma_{33}^{11} P_1^1 + \sigma_{33}^{21} P_2^1 \quad \text{y} \quad \sigma_{33}^2 = \sigma_{33}^{02} P_0^2 + \sigma_{33}^{12} P_1^2 + \sigma_{33}^{22} P_2^2, \quad (7.16)$$

respectivamente. En estas expresiones, los coeficientes que multiplican a los polinomios son:

$$\sigma_{33}^{01} = \frac{h \left(p - \frac{2p(R-h)}{hR^2+4R-h} \right)}{6 \left(R - \frac{h}{4} \right)} - \frac{p}{2} - \frac{p(R-h)}{hR^2+4R-h}, \quad (7.17)$$

$$\sigma_{33}^{11} = p - \frac{2p(R-h)}{hR^2+4R-h}, \quad (7.18)$$

$$\sigma_{33}^{21} = \frac{h \left(p - \frac{2p(R-h)}{hR^2+4R-h} \right)}{6 \left(R - \frac{h}{4} \right)}, \quad (7.19)$$

$$\sigma_{33}^{02} = \frac{hp(R-h)}{3 \left(R + \frac{h}{4} \right) (hR^2+4R-h)} - \frac{p(R-h)}{hR^2+4R-h}, \quad (7.20)$$

$$\sigma_{33}^{12} = \frac{2p(R-h)}{hR^2+4R-h}, \quad (7.21)$$

$$\sigma_{33}^{22} = \frac{hp(R-h)}{3 \left(R + \frac{h}{4} \right) (hR^2+4R-h)}. \quad (7.22)$$

La solución de las ecuaciones 3D se muestra en la ecuación (7.3). Los esfuerzos normales fuera del plano en la superficie media ($\xi_3 = 0$) de los problemas 3D y SAM-H son

$$\bar{\sigma}_{33}^{3D} = \frac{p \left(\left(\frac{\eta R^2}{2} + 1 \right)^3 - 1 \right) \left(\frac{R^2 \eta}{2} - 1 \right)^3}{\left(\frac{R^2 \eta}{2} - 1 \right)^3 + \left(\frac{\eta R^2}{2} + 1 \right)^3} \quad \text{y} \quad \bar{\sigma}_{33}^{SAM} = \frac{p (24 \eta \nu - 25 \eta + 20)}{10 (\eta - 4)}, \quad (7.23)$$

respectivamente. Para el modelo SAM-L, este esfuerzo en la superficie media corresponde al esfuerzo de interface, el cual está dado por:

$$\sigma^{1,2} = \frac{2p (\eta - 1)}{\eta R^2 - \eta + 4} \quad (7.24)$$

Definamos los errores relativos del esfuerzo σ_{33} en la superficie media de los modelos SAM-L y SAM-H como:

$$\delta \sigma_{33}^{SAM-L} = \frac{\sigma^{1,2} - \bar{\sigma}_{33}^{3D}}{\bar{\sigma}_{33}^{3D}} \quad \text{y} \quad \delta \sigma_{33}^{SAM-H} = \frac{\bar{\sigma}_{33}^{SAM} - \bar{\sigma}_{33}^{3D}}{\bar{\sigma}_{33}^{3D}}. \quad (7.25)$$

En la figura 7.9, se reconstruye el perfil del esfuerzo σ_{33} normalizado respecto a la presión p , en función de la coordenada radial normalizada utilizando las ecuaciones en (7.3), (7.1) y (7.16). Se puede observar cómo el modelo SAM-L se aproxima más a la curva resultante de la solución analítica 3D. Observamos también, cómo la curva del modelo SAM-H, a partir de la interface (línea punteada $\xi_3 = 0$), se desvía de la solución 3D. En cambio, la curva del modelo SAM-L corrige su camino debido a su naturaleza layer-wise. Esto es una prueba más de que el modelo puede utilizarse para refinar los resultados sin usar SFE. Para finalizar, se hace una comparación directa entre ambos modelos desarrollados en este trabajo. En el gráfico de la figura 7.10, se muestra el error del esfuerzo normal radial en la superficie media como una función de la relación espesor a radio η para un coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ de ambos modelos. Así, se puede decir que el modelo SAM-L obtiene excelentes aproximaciones aún para los cascarones más gruesos, incluso superando al SAM-H. Pero, debemos recordar que para obtener soluciones con el modelo SAM-L se dividió la esfera en dos cuerpos. Esto quiere decir que tenemos 10 ecuaciones de equilibrio mientras que en el modelo SAM-H tenemos 5, lo que aumenta el costo de cálculo para SAM-L.

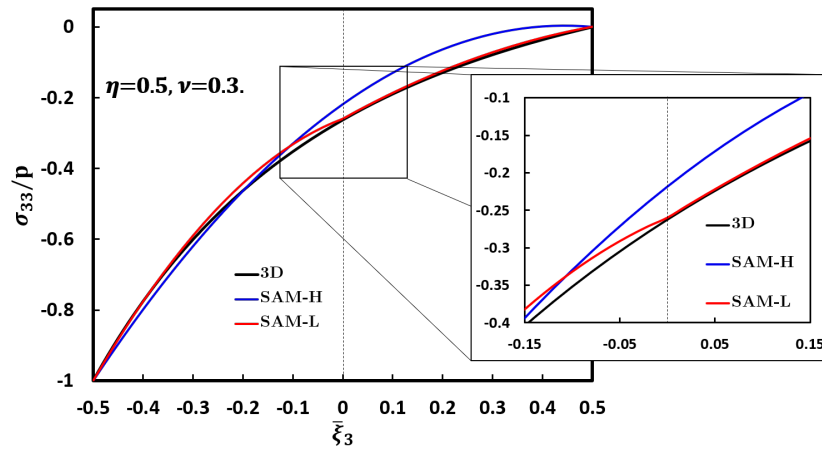


Figura 7.9: Esfuerzo normal radial normalizado en la esfera vs la posición normalizada $\bar{\xi}_3$; $\eta = 0.5$ y $\nu = 0.3$.

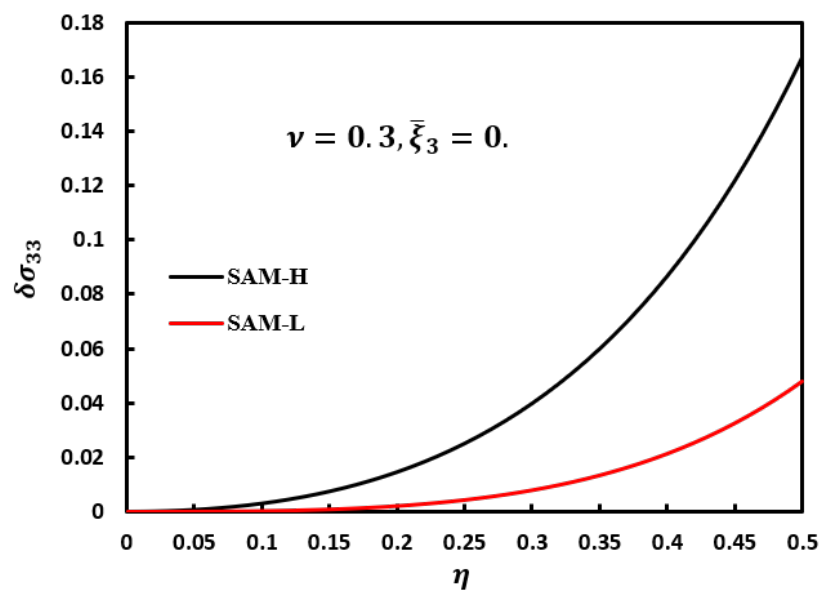


Figura 7.10: Error relativo del esfuerzo normal radial contra la relación radio/espesor de SAM-H y SAM-L.

7.2.2. Estudio dinámico.

Para este estudio, Se propone el problema de encontrar frecuencias naturales en la dirección radial de la esfera. Esto quiere decir, que obtendremos las frecuencias naturales donde sólo se permite el desplazamiento radial. Recordemos que esto también se realizó con los modelos CS y SAM-H, los cuales sólo logran captar una de estas frecuencias. Para el modelo SAM-L es posible encontrar más frecuencias naturales bajo estas mismas condiciones, ya que se pueden crear más grados de libertad en la dirección del espesor. Para el modelo SAM-L, los grados de libertad en dirección del espesor son iguales al número de capas en el que se divide la esfera. Por lo tanto, se propone dividir a la esfera en 10 capas para así poder calcular 10 modos de vibración. El dividir la esfera en 10 capas implica que tengamos 50 ecuaciones de equilibrio para el modelo SAM-L, resolver dichas ecuaciones a mano es una tarea muy compleja. Es por esto, que para la solución analítica del modelo SAM-L se utilizó el software MATLAB, el cual permite resolver sistemas de ecuaciones de forma simbólica. Los valores de estas frecuencias naturales considerando a la esfera como un sólido fueron obtenidas utilizando el software COMSOL. Los resultados SFE convergen, por lo que son tomados como referencia para el estudio de la precisión del modelo SAM-L. En la tabla 7.1, se muestran los valores de las frecuencias asociadas a 10 modos de vibración en el espesor de la esfera para SFE y SAM-L. Asimismo se muestra el error relativo respecto a SFE de estas frecuencias obtenidas utilizando las ecuaciones de SAM-L. Para fines comparativos, también se muestra el valor de la frecuencia fundamental que el modelo SAM-H predice. Podemos observar que, para el valor de la frecuencia fundamental, el error relativo del modelo SAM-L es más bajo que aquel del modelo SAM-H. El valor de las 10 frecuencias calculadas por el modelo para cascarones laminados es lo suficientemente preciso.

Modo	SFE	SAM-L	SAM-H	δf^L en %	δf^H en %
1	1374.43	1373.69	1362.24	-0.05	-0.89
2	9897.18	10723.6	—	8.35	—
3	19635.98	21262.72	—	8.28	—
4	29410.32	31737.69	—	7.91	—
5	39193.43	41990.4	—	7.14	—
6	48980.03	51785.4	—	5.73	—
7	58768.37	60779.48	—	3.42	—
8	68557.72	68534.02	—	-0.03	—
9	73267.7	74561.85	—	1.77	—
10	78347.68	78403.96	—	0.07	—

Cuadro 7.1: Primeras 10 frecuencias propias (en Hz) calculadas por SFE, SAM-H, y SAM-L.

Realicemos ahora un análisis del desplazamiento radial. En la figura 7.11, se grafican los modos de vibración 3 y 6 para ambos métodos (SAM-L y SFE), esto con el fin de tener una idea más visual de la precisión en las predicciones el modelo SAM-L. En este mismo gráfico, el eje vertical es el desplazamiento radial normalizado respecto a su valor máximo y el horizontal es la coordenada radial normalizada. Las “x” indican la coordenada radial normalizada donde existe una superficie media. Es decir, indican donde existe un grado de libertad en la dirección radial para el modelo SAM-L. Observando estas figuras, se puede decir que el modelo SAM-L obtiene resultados similares a aquellos de SFE. Cabe mencionar que, es normal que la curva del modo 3 de SAM-L se aproxime más a la solución SFE que la del modo 6, ya que entre más elevada sea la frecuencia asociada al modo de vibración, más grados de libertad son necesarios para representarlo con precisión. Este

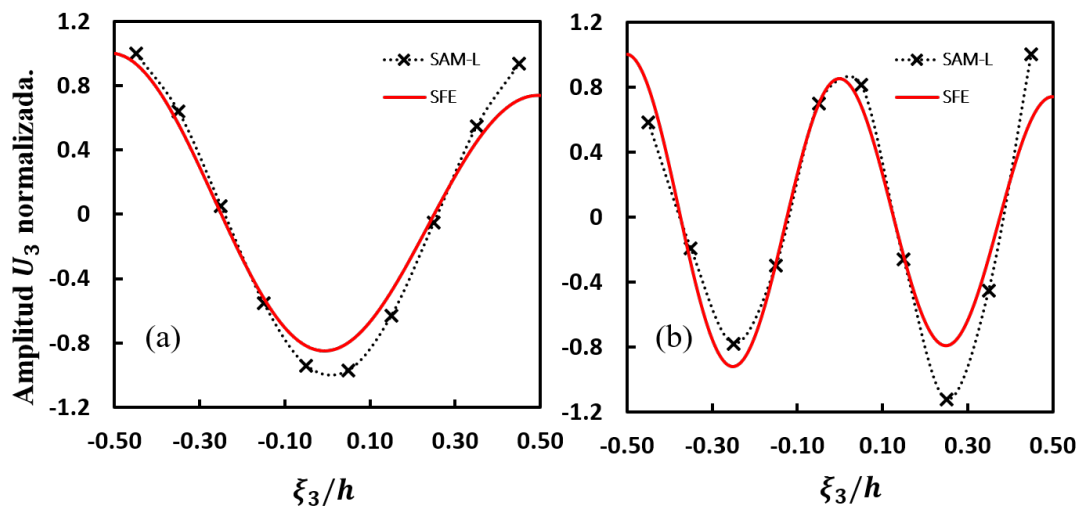


Figura 7.11: Amplitud del desplazamiento radial normalizado contra coordenada radial normalizada para los modos 3 (a) y 6 (b).

ejemplo ha demostrado cómo el modelo SAM-L puede ser utilizado para crear un mallado artificial en la dirección del espesor para un cascarón homogéneo.

7.3. Resultados numéricos del modelo SAM-H.

7.3.1. Estudio estático.

Para la validación numérica del modelo SAM-H, se considera un cilindro hueco de dos metros de altura (figura 7.12). El radio de la superficie media del cilindro y su espesor son respectivamente de 1m y 0.3 m. Se aplica una presión en una región de 0.25 m en la cara exterior del cilindro. Para la solución utilizando elementos finitos sólidos, la geometría y

la presión aplicada permiten que el problema sea reducido de 3D a uno 2D con simetría de revolución. En cuanto a la solución de los modelos para cascarones se utilizan elementos finitos 2D, es decir, sin alguna simplificación. La malla de elementos 2D utilizada se muestra en la figura 7.12b. Se asume material isotrópico cuyas propiedades son: módulo de Young y coeficiente de Poisson iguales a 200 GPa y 0.3, respectivamente. Los modelos CS y SAM-H permiten reconstruir el campo de esfuerzos 3D una vez finalizada la resolución de sus ecuaciones. En el software COMSOL Multiphysics, se nos permite evaluar el campo de esfuerzos en cualquier punto de la coordenada del espesor a partir de los resultados de la técnica MITC6. El campo de esfuerzos aproximado por cada una de estas teorías es reconstruido y algunos de sus componentes son graficados en la sección transversal del cilindro en las figuras 7.13 a 7.15. En la figura 7.13, se muestra el esfuerzo cortante σ_{rz} obtenido por cada una de las técnicas adoptadas. Se aprecia cómo el modelo SAM-H y la técnica MITC hacen una mejor aproximación a la solución SFE que el modelo clásico para cascarones. Cabe destacar, que este esfuerzo solo depende de la coordenada z para el modelo clásico, o, dicho de otra forma, es constante en el espesor. La reconstrucción del esfuerzo normal fuera del plano σ_{rr} se muestra en la figura 7.14. El modelo SAM-H es capaz de predecir con precisión este esfuerzo, a diferencia de los modelos CS y MITC que lo consideran igual a cero. Además, se comprueba que la aproximación de esfuerzos del modelo SAM-H cumple con las condiciones de frontera 3D sobre el campo de esfuerzos, lo cual representa una gran ventaja del modelo aquí desarrollado respecto a los otros dos modelos 2D para cascarones homogéneos. El esfuerzo de von Mises es un esfuerzo que considera todas las componentes del tensor de esfuerzos 3D. Es así que, se puede hacer una comparación global de la aproximación del campo de esfuerzos calculando el esfuerzo de von Mises de cada modelo. Lo anterior se muestra en la 7.15, donde se reafirma la mejor calidad en la aproximación de los esfuerzos del modelo SAM-H. El esfuerzo de von Mises se utiliza en criterios de falla en la ingeniería de estructuras; la estructura resiste mientras que el esfuerzo de von Mises máximo sea menor que el esfuerzo de cedencia. Por lo tanto, es importante mostrar el valor máximo del esfuerzo de von Mises predicho por cada una de las teorías y compararlo con aquel de SFE. Este valor es de 2.15MPa, 2.10MPa, 1.91 MPa, y 1.63MPa para SFE, SAM-H, CS y MITC6, respectivamente. Además, la localización de este valor máximo está en la cara interior del cilindro para SFE y SAM-H mientras que los métodos CS y MITC6 la presentan en la cara exterior. Una vez más, el modelo SAM-H ha mostrado tener una gran precisión en el cálculo del tensor de esfuerzos.

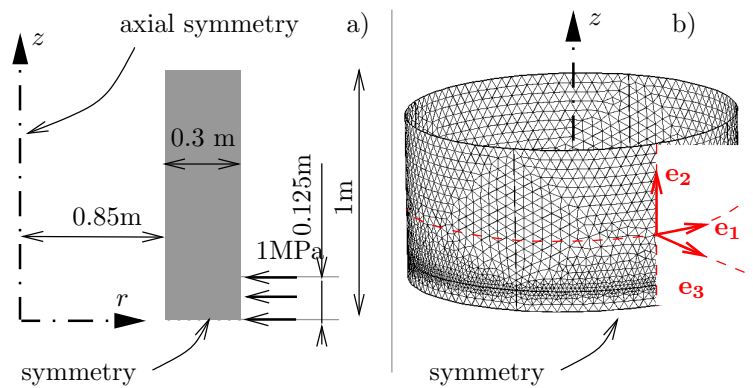


Figura 7.12: Constricción de un cilindro hueco grueso: modelado usando elementos finitos sólidos (a) y malla para modelos de cascarones. (b).

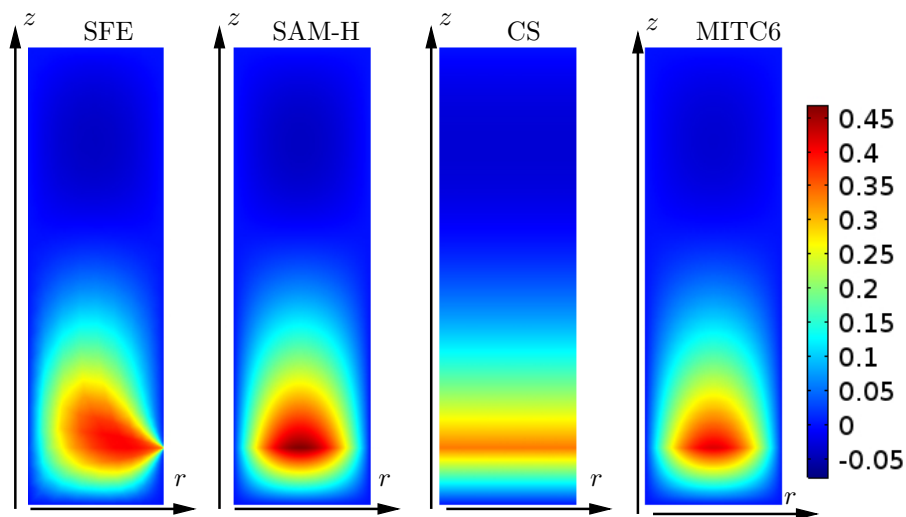


Figura 7.13: Esfuerzo cortante σ_{rz} (en MPa) en la sección transversal del cilindro (resultados SFE, SAM-H, CS y MITC6).

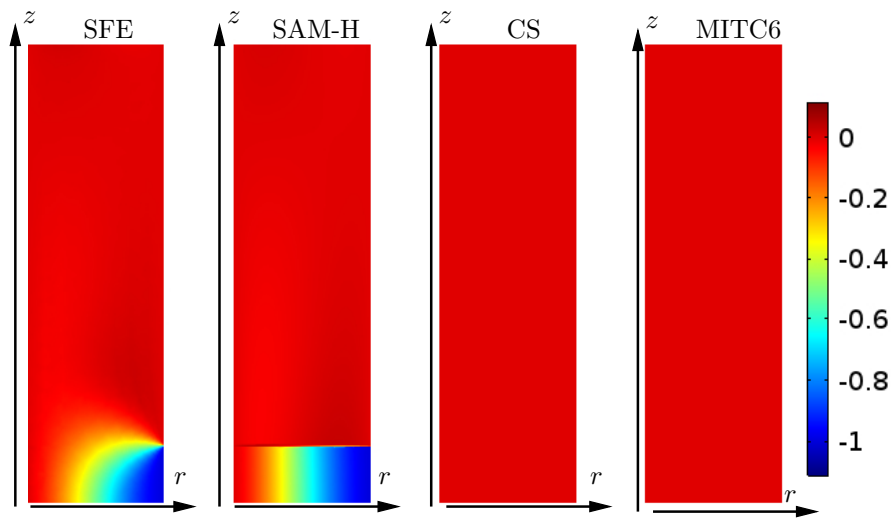


Figura 7.14: Esfuerzo normal σ_{rr} (en MPa) en la sección transversal del cilindro (resultados SFE, SAM-H, CS y MITC6).

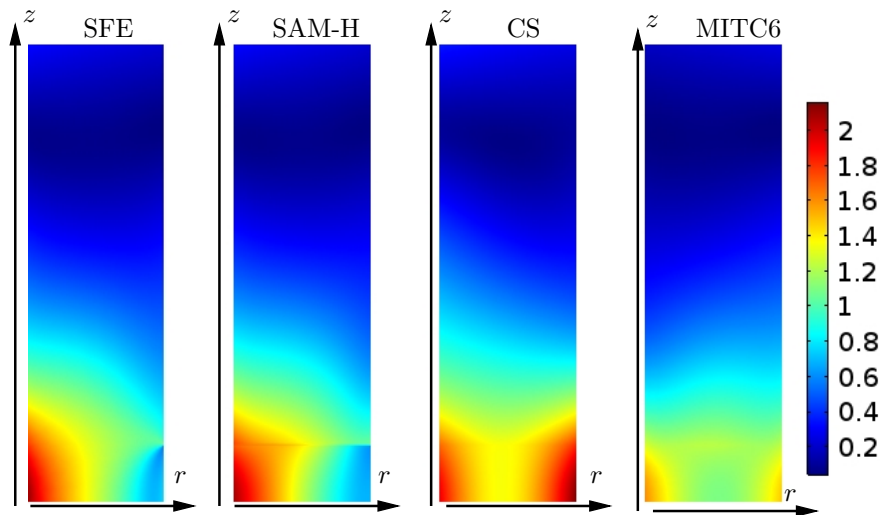


Figura 7.15: Esfuerzo de von Mises (en MPa) en la sección transversal del cilindro (resultados SFE, SAM-H, CS y MITC6).

7.3.2. Estudio dinámico.

Para este estudio, se considera el catenoide de concreto en la figura 7.16 con altura $a = 3$ m y espesor $h = 0.9$ m. El módulo de Young, coeficiente de Poisson y la densidad del concreto son $E = 25$ GPa , $\nu = 0.2$ y $\rho = 2300$ kg/m³, respectivamente. Las coordenadas cartesianas de la superficie media del catenoide están dadas por

$$x = a \cosh(s) \cos(\phi), \quad (7.26)$$

$$y = -a \cosh(s) \sin(\phi), \quad (7.27)$$

$$z = a s, \quad (7.28)$$

donde $s \in [-1, 0]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. Las coordenadas curvilíneas ξ_1 y ξ_2 están dadas por:

$$\xi_1 = a (\sinh(s) + \sinh(1)), \quad (7.29)$$

$$\xi_2 = a\phi \cosh(s). \quad (7.30)$$

Las curvaturas principales del catenoide dependen de la posición y son de signos opuestos ($\kappa_1 = -\kappa_2$). De esta forma, la superficie media tiene curvaturas Gaussiana negativa $K < 0$ y curvatura promedio $H = 0$. El valor máximo de la relación radio a espesor es $\eta_{max} = 0.3$ y la relación radio a espesor promedio es

$$\bar{\eta} = \frac{\int_{\omega} \eta d\omega}{\int_{\omega} d\omega} \simeq 0.21. \quad (7.31)$$

Basándonos en estos dos valores podemos decir que el catenoide prácticamente es un cascarón grueso.

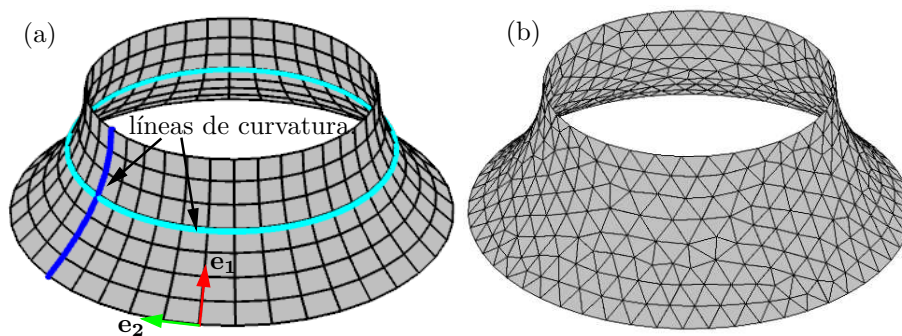


Figura 7.16: Superficie media del catenoide (a) y ejemplo de un mallado 2D (b).

La solución de SFE se obtuvo a partir de elementos tetraédricos cuadráticos y todos

sus resultados presentados en esta sección convergen. En la resolución por elemento finito de todos los modelos para cascarones se utilizaron elementos triangulares de 6 nodos y polinomios de interpolación cuadráticos. Un de los mallados utilizados en el cómputo por elementos finitos 2D se muestra en la figura 7.16(b); para todos los mallados de este tipo se seleccionó un tamaño de elemento casi constante.

Frecuencias propias y análisis de convergencia.

Primero, realicemos un estudio de frecuencias propias del catenoide considerando su base empotrada, es decir, todos los desplazamientos son cero en la coordenada $\xi_1 = 0$. Para probar la convergencia de los modelos de cascarones, se realizaron varias resoluciones usando diferentes tamaños de elemento. Para el cómputo, utilizando un mallado número i se tiene un tamaño de elemento más pequeño que aquel con el mallado $i - 1$. Se calculan 10 frecuencias naturales y se analiza el error aproximado

$$\delta f_i^j = \left| \frac{f_i^j - f_{i-1}^j}{f_i^j} \right| 100 \% \quad (7.32)$$

en el cálculo de la frecuencia j , donde f_i^j es el valor estimado de la frecuencia natural j utilizando el mallado i . La frecuencia que presentó la convergencia más baja fue la número 10 para todos los modelos 2D. Se grafica el error aproximado δf^{10} de dicha frecuencia de las teorías CS, SAM-H y MITC6 como una función del número de grados de libertad (DoF) en la figura 7.17. Los modelos CS y SAM-H presentan prácticamente la misma convergencia, la cual es más rápida que la de la técnica MITC6. A partir de aquí, las mallas son seleccionadas de tal manera que el error aproximado de las frecuencias naturales calculadas por todos los modelos sea menor a 0.01 %. Se presenta una lista de los valores calculados de las 10 primeras frecuencias naturales calculadas por SFE en la tabla 7.2. En esta misma tabla, se muestran las frecuencias calculadas por los modelos para cascarones y son asociadas a los modos de vibración resultantes del análisis con SFE. Comparado con SFE, los modelos CS, SAM-H y MITC presentan un error relativo menor al 4 %, lo cual es un error muy bajo considerando que se le clasificó al cascarón como grueso. Para finalizar este estudio de frecuencias naturales, se muestra la magnitud del desplazamiento del primer modo de vibración para cada uno de los métodos adoptados (SFE, CS, SAM-H y MITC) en la figura 7.18, los modelos 2D arrojan resultados parecidos aquellos de SFE. Es así que, se puede decir que los modelos CS, SAM-H y MITC6 son precisos en el estudio de frecuencias naturales.

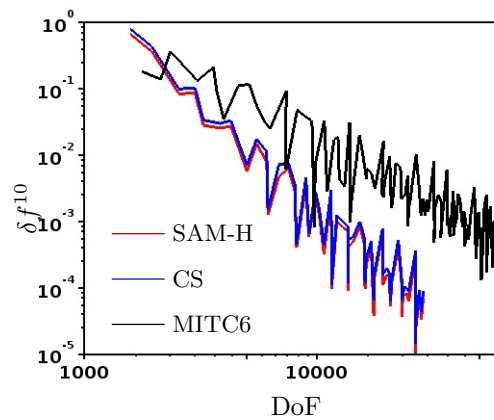


Figura 7.17: Convergencia de los modelos SAM-H, CS y MITC6.

j	SFE	SAM-H	CS	MITC6
1,2	119.60	123.16	119.77	118.71
3,4	122.98	124.18	122.82	122.82
5	141.84	140.09	142.38	142.67
6,7	154.23	155.88	154.47	151.26
8	198.17	193.96	196.06	196.68
9,10	198.32	197.10	196.60	191.72

Cuadro 7.2: Primeras 10 frecuencias propias (en Hz) calculadas por SFE, SAM-H, CS y MITC6.

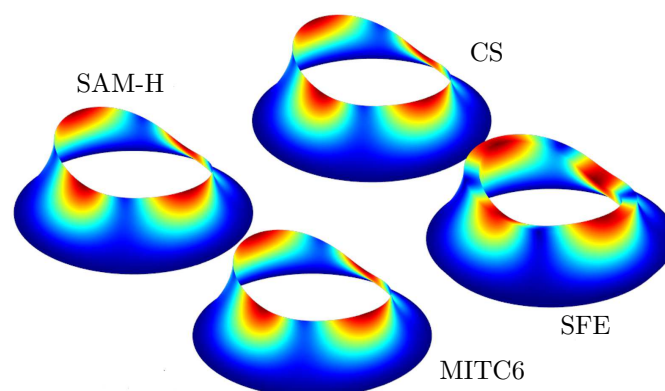


Figura 7.18: Primer modo de vibración predicho por SFE, SAM-H, CS y MITC6.

Análisis de dominio de la frecuencia para una presión interna.

Es este estudio, se considera una presión armónica $p = p_0 \sin(2\pi\bar{f}t)$ aplicada en la cara interna del cascarón; p_0 y \bar{f} son la amplitud de la presión y la frecuencia de excitación, respectivamente. Se realiza un barrido sobre el valor la frecuencia de excitación \bar{f} con una amplitud fija $p_0 = 1$ MPa. El catenoide está fijo en su base ($\xi_1 = 0$). Para la solución con elementos finitos sólidos, se reduce el problema a uno de simetría 2D de revolución, lo que reduce el costo computacional. Primero, analicemos la amplitud del desplazamiento U_3 en dirección normal a la superficie media calculada por cada uno de los modelos de cascarones y elementos finitos sólidos, dicha amplitud se muestra en la figura 7.19. El pico en la amplitud del desplazamiento se encuentra aproximadamente a 83 Hz para todos los métodos adoptados para la resolución del problema. Sin embargo, la curva del modelo SAM-H muestra ser un poco más precisa que los otros dos modelos de cascarones.

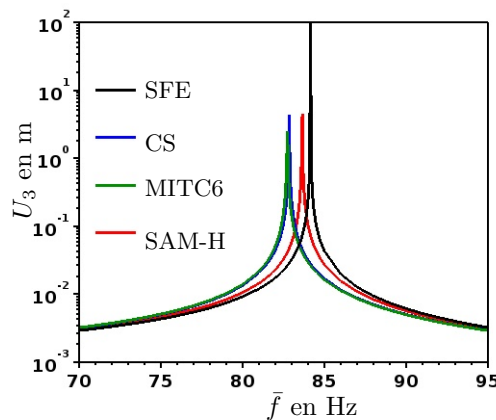


Figura 7.19: Curva amplitud del desplazamiento vs frecuencia de excitación predicha por SFE, SAM-H, CS y MITC6.

La frecuencia de excitación debe ser menor a 83 Hz para prevenir el fenómeno de resonancia. Supongamos que la frecuencia de excitación no será mayor a 70 Hz y analicemos las amplitudes de los esfuerzos en este límite. Los componentes del tensor de esfuerzos se grafican en la línea azul paralela a ξ_1 . La evolución de la amplitud de los esfuerzos en el plano σ_{11} y σ_{22} en la cara exterior del cascarón respecto a la coordenada ξ_1 se muestran en las figuras 7.20a y 7.20b, respectivamente. Observando estos dos gráficos, nos podemos dar cuenta que la aproximación para estas dos componentes del tensor de esfuerzos obtenida por el modelo SAM-H es mejor que aquella realizada por los modelos CS y MITC. Los máximos de estos esfuerzos calculados por elementos finitos sólidos son aproximados de forma más precisa por el modelo SAM-H. Debemos destacar que el esfuerzo σ_{22} es el

que alcanza los valores más altos de entre todas las componentes del tensor de esfuerzos. La curva del esfuerzo σ_{22} producida por el modelo SAM-H es la que más se aproxima a la solución SFE. Analicemos ahora la precisión del modelo SAM-H en el cálculo de los esfuerzos fuera del plano en la superficie media. En la figura 7.21 (a), se grafica el esfuerzo cortante σ_{13} contra la coordenada curvilínea ξ_1 . El comportamiento de este esfuerzo calculado por SFE es aproximado de forma más precisa por el modelo SAM-H que los otros dos modelos para cascarones. Revisemos ahora los resultados del esfuerzo normal fuera del plano σ_{33} . Las curvas de este esfuerzo, obtenidas mediante SAM-H y SFE, son graficadas en la figura 7.21 (b). Debemos recalcar nuevamente que con las técnicas CS y MITC6 este esfuerzo no puede ser calculado. El esfuerzo σ_{33} en las caras interior y exterior del cascarón es 1 MPa y 0 MPa, respectivamente. Esto prueba la capacidad del modelo SAM-H para cumplir las condiciones de frontera 3D sobre el campo de esfuerzos. Además, la curva de modelo SAM-H presenta un comportamiento similar a aquella de SFE.

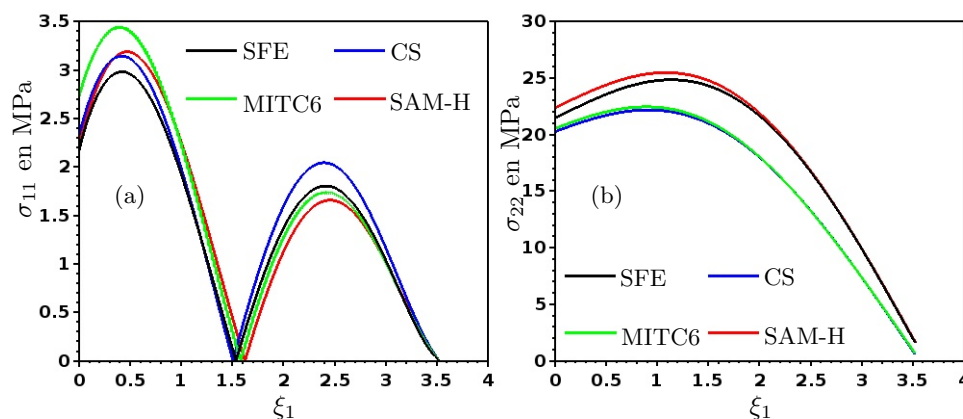


Figura 7.20: Curvas σ_{11} vs ξ_1 (a) y σ_{22} vs ξ_1 (b) en la cara externa del cascarón obtenida por SFE, CS, MITC6 and SAM-H.

7.4. Resultados numéricos del modelo SAM-L.

Para obtener resultados numéricos del modelo SAM-L, se propone un cilindro en constricción similar a aquel presentado para el modelo SAM-H. El cilindro es un laminado 0 90 de 1.5 m de altura y radio de 1 m. La presión de constricción es p_0 y se aplica en una región de 0.75 m de altura ($z \in [-0.375 \text{ m}, 0.375 \text{ m}]$). En la figura 7.22, se muestra un esquema del problema adoptado. Dadas las condiciones del problema existe un plano de simetría, el cual está en situado en $z=0$ (línea azul). Las dos capas del cascarón laminado son del mismo material: material compuesto unidireccional vidrio-epoxi con las siguien-

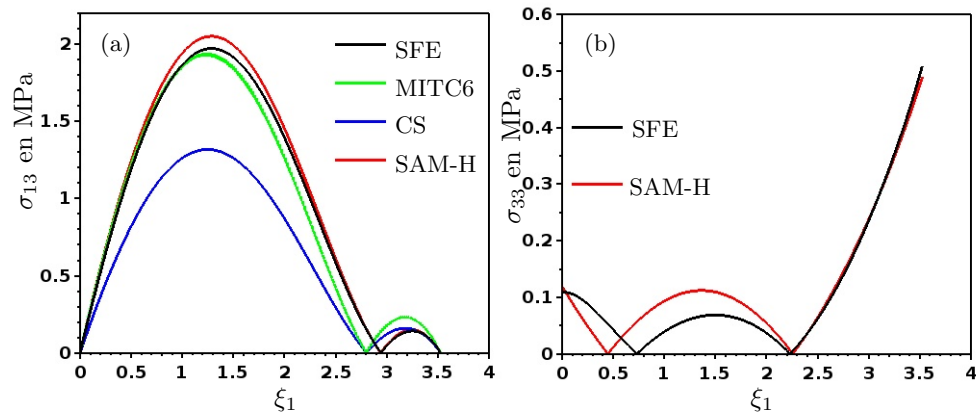


Figura 7.21: Curvas σ_{13} vs ξ_1 (a) y σ_{33} vs ξ_1 (b) en la superficie media del cascarón obtenidas por SFE, CS, MITC6 and SAM-H.

tes propiedades: $E_L = 38.6$ GPa, $E_T = E_N = 8.3$ GPa, $\nu_{TN} = 0.34$, $\nu_{LN} = \nu_{LN} = 0.34$, $G_{LT} = G_{LN} = 8.9$ GPa, $G_{TN} = 3.4$ GPa. Las capas interna y externa tienen la orientación de sus fibras a 0 grados y 90 grados respecto a la línea de curvatura ξ_1 , respectivamente. Para este cilindro, se realizan un estudio estático y otro dinámico.

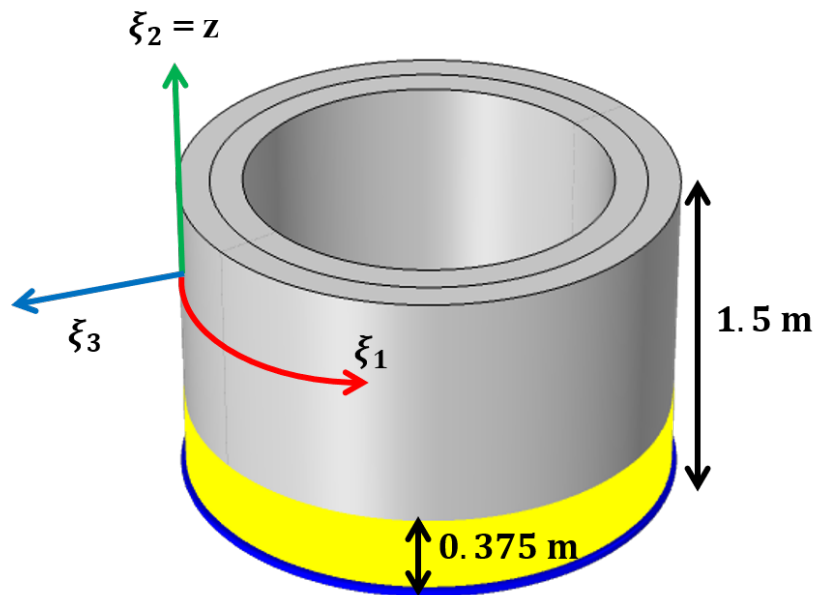


Figura 7.22: Geometría y sistema de coordenadas del cascarón laminado.

7.4.1. Estudio estático.

En esta parte del trabajo, se compara la solución estática del modelo SAM-L con aquella de SFE para el problema anteriormente descrito. En las figuras 7.23 y 7.24, se muestra la magnitud del desplazamiento en las capas del cascarón resultantes de SFE y SAM-L. Vale la pena señalar que SFE puede calcular el desplazamiento radial en todo el volumen mientras que el modelo SAM-L sólo lo hace en la superficie media de las capas. Sin embargo, se puede decir que el modelo hace una buena estimación del desplazamiento promedio en cada una de las capas. El objetivo del modelo SAM-L es predecir con precisión el campo de esfuerzos, no el de desplazamiento. A continuación, se comparan las componentes

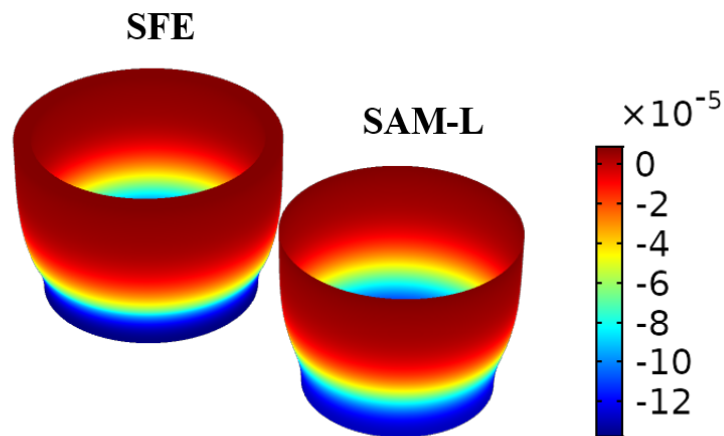


Figura 7.23: Desplazamiento(en m) radial de la capa 1 obtenido por SFE y SAM-L.

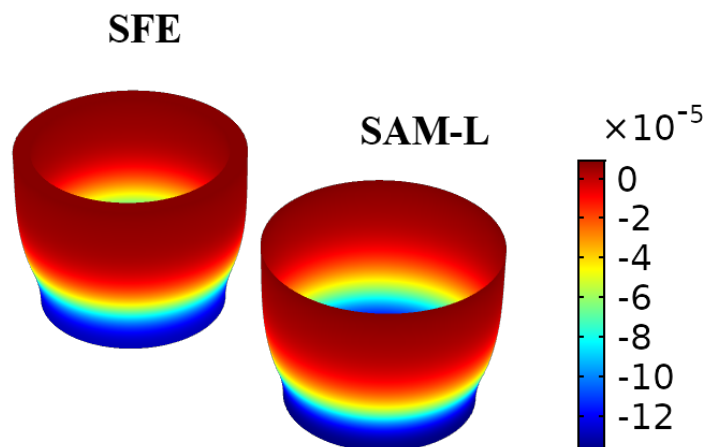


Figura 7.24: Desplazamiento (en m) total de la capa 2 obtenido por SFE y SAM-L.

del campo de esfuerzos en el perfil del cilindro que se muestra en la figura 7.25. Los mapas

de colores de esfuerzos mostrados por el modelo SAM-L son reconstruidos utilizando las definiciones en el anexo B. En la figura 7.26, se muestran los esfuerzos en el plano σ_{11} y σ_{22} , los mapas de colores obtenidos mediante SFE y SAM-L son muy similares. Para los esfuerzos fuera del plano, mostrados en la figura 7.27, existe una mejor correspondencia entre SAM-L y SFE para el esfuerzo σ_{33} que para el esfuerzo σ_{23} . Sin embargo, el esfuerzo σ_{33} es de orden mayor ($\times 10^6$) que σ_{23} ($\times 10^5$), por lo que σ_{33} tiene una mayor relevancia en la predicción de la falla de la estructura. Para una evaluación global de la precisión de la aproximación del campo de esfuerzos del modelo SAM-L, se calcula el esfuerzo de von Mises, ya que este esfuerzo toma en cuenta todas las componentes del tensor de esfuerzos y es utilizado en la predicción de falla. El esfuerzo de von Mises se muestra en la figura 7.28, el mapa de colores obtenido por SAM-L es bastante preciso respecto SFE. En esta misma figura, se dan los valores máximos del esfuerzo de von Mises y el lugar donde éste ocurre en cada capa del laminado. El error relativo respecto a SFE del máximo valor del esfuerzo de von Mises en la capa interna es -0.09% mientras que en la capa externa es de -7.2% , ambos errores son menores que 10% , por lo que tenemos una buena aproximación considerando que el laminado tiene una relación espesor-radio $\eta = 0.3$.

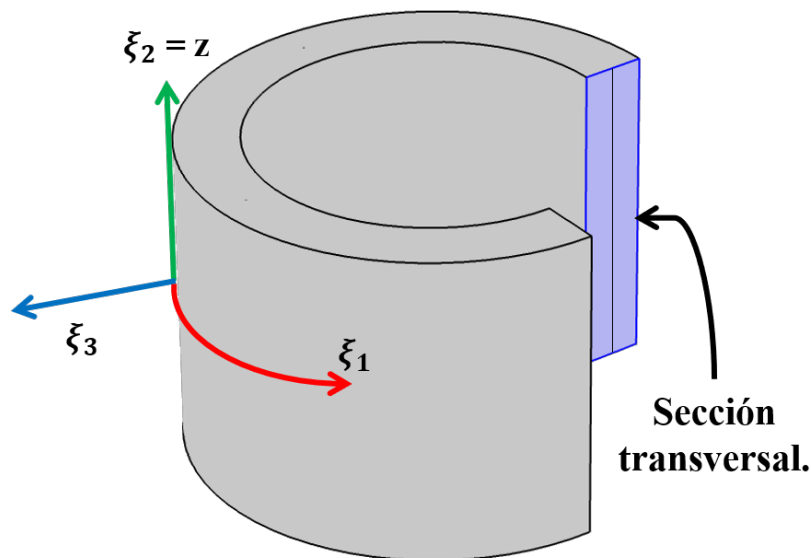


Figura 7.25: Sección transversal en el cilindro laminado.

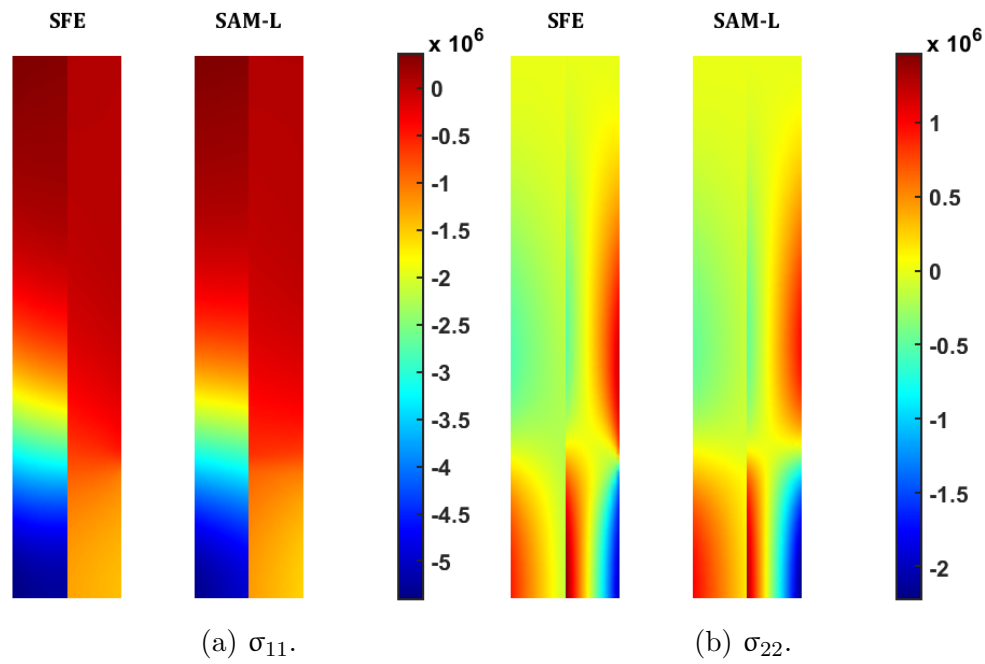


Figura 7.26: Esfuerzos en el plano en la sección transversal del cilindro laminado en Pa.

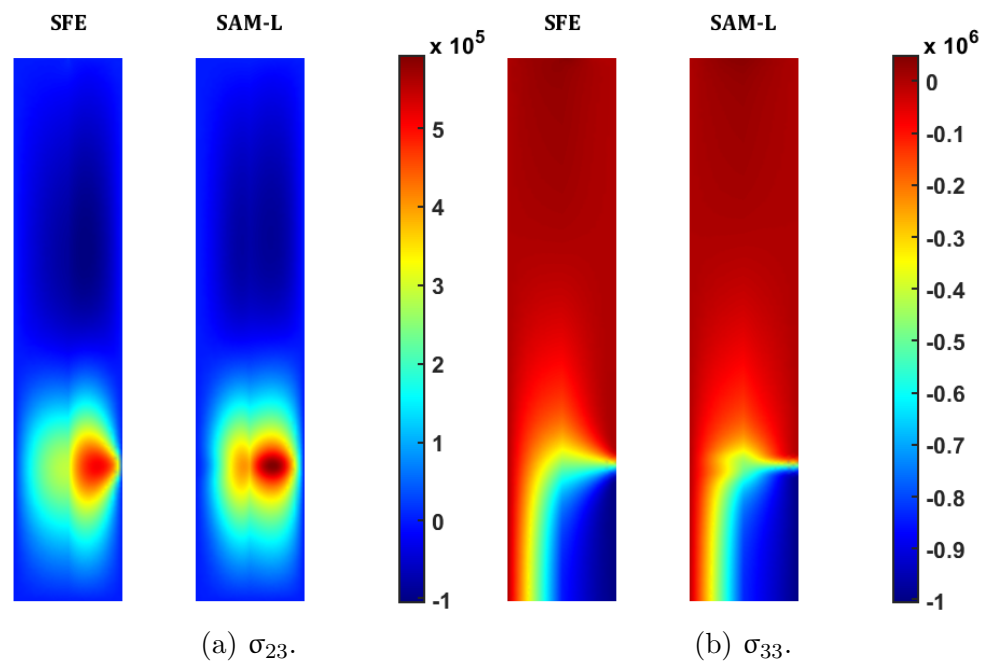
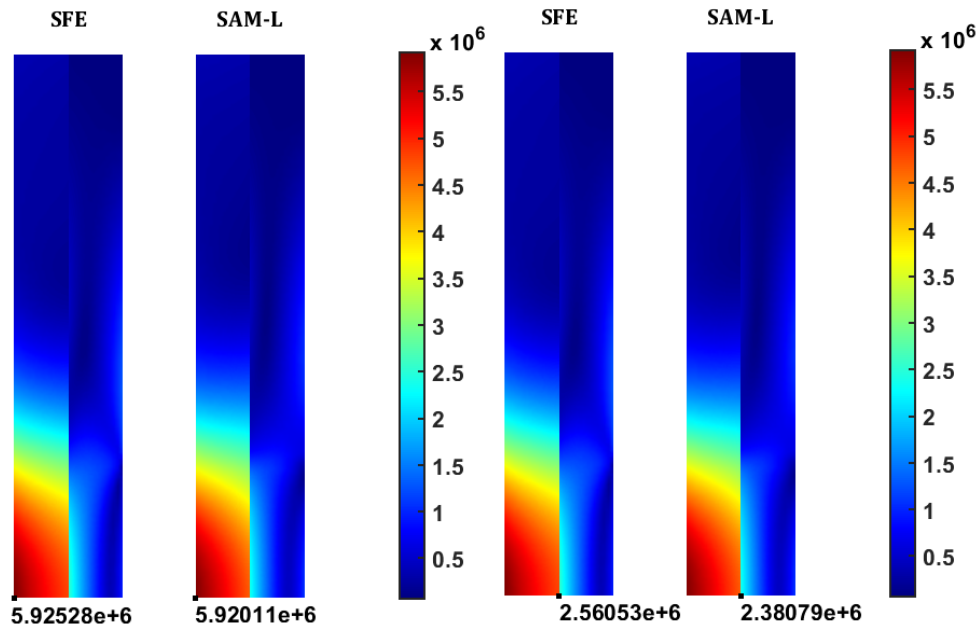


Figura 7.27: Esfuerzos fuera del plano en la sección transversal del cilindro laminado en Pa.



(a) Máximo esfuerzo de von Mises en la capa interior. (b) Máximo esfuerzo de von Mises en la capa exterior.

Figura 7.28: Esfuerzo de von Mises en en la sección transversal del cilindro laminado en Pa.

Como se vio anteriormente, los esfuerzos de interfase causan la delaminación en los materiales compuestos laminados. Por esto, analicemos los resultados de los esfuerzos de interfase obtenidos con el modelo para cascarones laminados. La curva de esfuerzo de interfase normal $\sigma^{1,2}$ normalizado respecto a la amplitud p_0 contra la coordenada ξ_2 se grafica en la figura 7.29 para SAM-L y SFE. El modelo SAM-L tiene una alta calidad en la aproximación de este esfuerzo, su curva es prácticamente la misma que la de SFE. Entre la capa 1 y la capa 2, debido a la constricción, se produce un esfuerzo cortante $\tau_2^{1,2}$. Este esfuerzo $\tau_2^{1,2}$ se normaliza también dividiéndolo por p_0 y se muestra en la figura 7.30 como una función de la coordenada ξ_2 . Se puede decir que el modelo SAM-L arroja una curva similar a la de SFE, excepto en la región donde se presenta el valor máximo. Este valor máximo se presenta donde la presión de constricción del cascarón pasa bruscamente de un valor p_0 a un valor de cero, por lo que algún tipo de discontinuidad en los esfuerzos y/o sus derivadas era esperada. Además, para el desarrollo de las ecuaciones del modelo, en el cálculo de las ecuaciones de comportamiento generalizadas, términos de divergencias de los esfuerzos cortantes de interfase fueron despreciados. Entonces, es normal que, para este caso, el modelo SAM-L obtenga mejores resultados del esfuerzo normal que del cortante en la interfase. Si hacemos una evaluación global de la precisión en la estimación de los esfuerzos de interfase del modelo SAM-L, se puede decir que es excelente tomando en

cuenta que el laminado es moderadamente grueso.

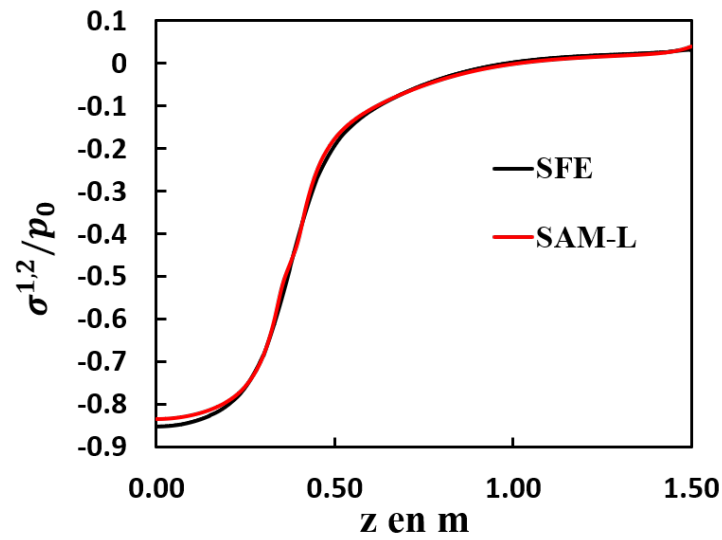


Figura 7.29: Esfuerzo normal σ_{33} normalizado en la interfase del laminado calculado con SFE y SAM-L.

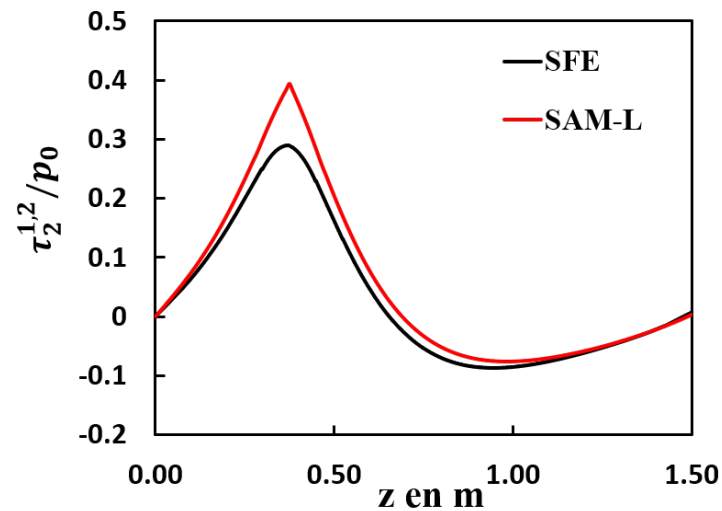


Figura 7.30: Esfuerzo cortante σ_{23} normalizado en la interfase del laminado calculado con SFE y SAM-L.

7.4.2. Estudio dinámico.

Para probar los resultados dinámicos, se propone un análisis frecuencial con presión de constricción p , la cual tiene una amplitud p_0 y una frecuencia de excitación \bar{f} . Para este problema, sólo revisaremos la amplitud del desplazamiento radial U_3 en ambas capas del

laminado. Para SAM-L y SFE se seleccionó un punto en la superficie media con coordenada $\xi_2 = 1.5$ m para la evaluación de dicha amplitud. La solución obtenida a partir de ambos métodos es independiente de la coordenada ξ_1 . En la figura 7.31, se grafica la amplitud del desplazamiento radial contra la frecuencia de excitación \bar{f} calculados por SFE y SAM-L. El número de picos obtenidos por ambas técnicas es seis. Se puede observar que SAM-L obtiene una frecuencia donde ocurre el primer pico de la amplitud del desplazamiento radial muy cercana a la de SFE. Esto también ocurre para el último pico de la amplitud. También, se obtiene una aproximación aceptable de los niveles de frecuencia de excitación \bar{f} donde ocurren los picos intermedios. El modelo SAM-L predice con gran precisión un rango de frecuencias de excitación que es preferible evitar. En pocas palabras, el modelo SAM-L y SFE presentan la misma zona de frecuencias que se debe evitar para asegurar la funcionalidad de la estructura.

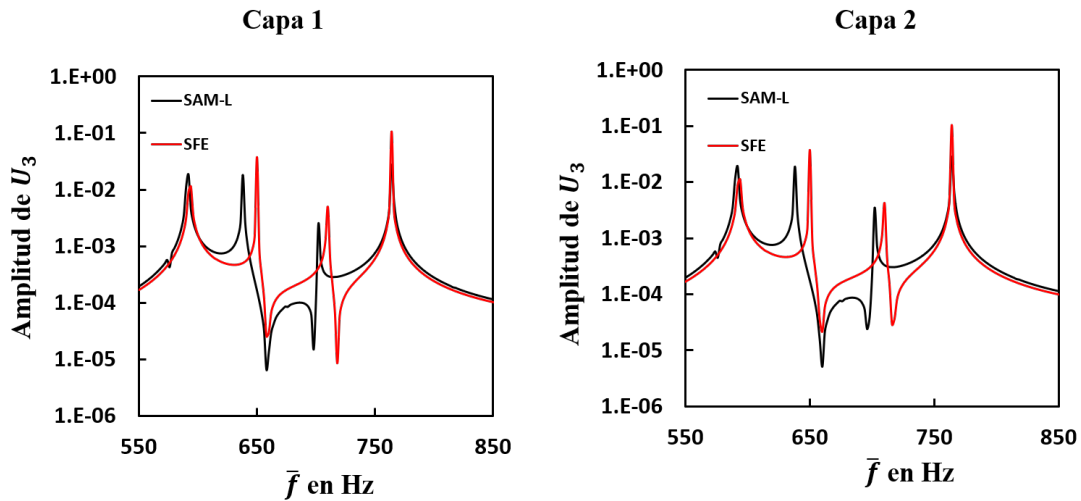


Figura 7.31: Curvas amplitud de desplazamiento radial vs frecuencia de excitación calculadas por SAM-L y SFE en de la interfase ($\xi_2 = 1.5$ m).

Conclusiones.

Dos modelos para cascarones moderadamente gruesos fueron desarrollados, uno para cascarones homogéneos llamado SAM-H y otro para cascarones laminados llamado SAM-L. Los modelos, en el caso estático, fueron obtenidos mediante una aproximación del campo de esfuerzos y el teorema de Reissner. El funcional de Hellinger-Reissner (HR) permite identificar los desplazamientos generalizados de los modelos. La estacionariedad del funcional HR respecto a los desplazamientos generalizados produce 5 y $5n$ (n es el número de capas del laminado) ecuaciones de equilibrio generalizadas para los modelos SAM-H y SAM-L, respectivamente. Esta misma estacionariedad arroja las condiciones de borde sobre fuerzas generalizadas de los modelos. Una integración por partes en el funcional de HR permite identificar las deformaciones generalizadas de los modelos sin haber realizado alguna aproximación sobre el campo de desplazamientos 3D. La estacionariedad del funcional HR respecto a las fuerzas generalizadas proporciona las ecuaciones constitutivas generalizadas y las condiciones de borde sobre los desplazamientos generalizados. Posteriormente, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, las aceleraciones fueron agregadas de una forma pertinente a las ecuaciones de los modelos SAM-L y SAM-H. Los modelos SAM-H y SAM-L se validaron tanto analíticamente como numéricamente. Para la validación analítica, problemas sencillos fueron propuestos y se encontró la solución exacta por medio de las ecuaciones del modelo SAM-H, SAM-L, CS y 3D de mecánica, para después hacer una comparación entre éstas. Para la validación numérica, los modelos CS, SAM-H y SAM-L fueron implementados exitosamente en el software COMSOL Multiphysics 5.3a de elementos finitos y se confrontaron sus resultados con aquellos del modelo de elementos de superficie MITC, y elementos finitos sólidos (ambos disponibles en dicho software).

De las comparaciones analítica y numérica se puede resaltar lo siguiente:

- El modelo SAM-H tiene el mismo número de desplazamientos generalizados que el modelo clásico de cascarones (CS) presentado por Reddy en [4].
- La teoría SAM-H probó ser mejor que la teoría CS incluso en la aproximación del

campo de desplazamientos. Recordemos que el objetivo del modelo es predecir el campo de esfuerzos con precisión no el de desplazamientos.

- A diferencia del modelo CS y la técnica MITC, la aproximación del campo de esfuerzos del modelo SAM-H cumple tanto con la ecuación de equilibrio 3D como con las condiciones de frontera 3D.
- En el modelo SAM-H, los esfuerzos aplicados en las caras del cascarón aparecen directamente en las ecuaciones de equilibrio generalizadas y en las ecuaciones constitutivas generalizadas, lo que no ocurre en el modelo CS.
- Como otra consecuencia de la buena aproximación sobre el campo de esfuerzos, el modelo SAM-H puede distinguir el efecto de aplicar esfuerzos en las cara interior o exterior del cascarón.
- En el modelo CS, las fuerzas generalizadas sólo dependen de las deformaciones generalizadas, mientras que en el modelo SAM-H, dichas fuerzas también dependen de los esfuerzos aplicados en las caras del cascarón y las fuerzas volumétricas.
- Los esfuerzos en las caras del cascarón están presentes en las ecuaciones constitutivas del modelo SAM-H, ya que se tomó en cuenta el efecto de Poisson normal-planar que está asociado a la energía elástica w_e^c de acoplamiento de esfuerzo normal fuera del plano y esfuerzos en el plano.
- Los modelos SAM-H y CS tienen una mayor rapidez de convergencia que la técnica MITC6, lo que significa un ahorro en el costo computacional.
- El modelo SAM-L puede ser utilizado en problemas de cascarones homogéneos si éste es dividido en capas, lo cual puede interpretarse como una malla artificial en la dirección del espesor.
- El modelo SAM-L es capaz de obtener excelentes resultados para cascarones homogéneos, los cuales son mucho más precisos que aquellos de la teoría SAM-H. Esto se debe a que, en el modelo SAM-H los términos del orden de la relación $\eta = h/R$ del cascarón son depreciados y en la teoría SAM-L los términos despreciables son del orden de la relación $\eta_i^2 = h^2/R_i^2$ (donde h_i y R_i son el espesor y los radios de curvatura principales de la capa i).
- El modelo SAM-L también puede ser utilizado para crear más grados de libertad en la dirección del espesor en problemas dinámicos y así poder encontrar más frecuencias naturales en dicha dirección.

- En cada uno de los problemas planteados, tanto para estudios estáticos y dinámicos, los modelos SAM-H y SAM-L desarrollados en este trabajo son los que más se aproximan a la solución de elementos finitos sólidos (utilizada como referencia).
- Se demostró que los modelos SAM-H y SAM-L tienen una alta calidad en la forma de aproximar el campo de esfuerzos. Las soluciones de los modelos SAM-H y SAM-L de la componente de esfuerzo normal fuera del plano σ_{33} son muy precisas respecto a SFE, además de verificar las condiciones en las caras del cascarón, lo cual, ningún otro modelo para cascarones es capaz de realizar.
- Se comprobó que el modelo SAM-L obtiene muy buenas predicciones en lo que se refiere a esfuerzos de interfase en cascarones laminados moderadamente gruesos.
- El modelo SAM-L obtiene buenos resultados en cuanto a fenómenos dinámicos de cascarones laminados se refiere, como por ejemplo, el estudio de respuesta a la frecuencia y frecuencias propias.

Por todo lo anterior, se puede decir que se verificó la hipótesis, ya que se creó el modelo SAM-L de cascarones laminados, capaz de evaluar con precisión el campo de esfuerzos, así como lo hace el modelo M4-5n para placas laminadas. Además, cabe subrayar que cuando las curvaturas se hacen cero, el modelo SAM-L es idéntico al modelo M4-5n. Por esto, se puede decir que el modelo SAM-L es una extensión del modelo M4-5n.

Por la calidad de sus resultados de esfuerzos de interfase, el modelo SAM-L acompañado de criterios pertinentes de delaminación, puede ser utilizado para predecir el inicio de este modo de falla en cascarones laminados. Ambos modelos, SAM-H y SAM-L, pueden ser implementados en software comercial para el análisis de cascarones. Para trabajos futuros, se recomienda mejorar los modelos de capa única equivalente utilizados para cascarones laminados. Esto podrá realizarse empleando como base el modelo SAM-L y adoptando simplificaciones pertinentes referentes al campo de desplazamientos en todo el laminado. También, será de utilidad extender la aplicabilidad del modelo SAM-H para cascarones hechos de materiales funcionalmente graduados. Finalmente, la aplicación de la mecánica de fractura utilizando el modelo SAM-H podría simplificar los altos costos computacionales que implican los cálculos 3D y mejoraría la confiabilidad de los resultados que se obtienen con modelos de cascarones para analizar el crecimiento de grietas.

Anexo.

A. Rigideces generalizadas.

En este anexo se da una descripción detallada de las matrices de rigidez que aparecen en la ecuación (5.144).

- La matriz \mathbf{K} está definida por:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

$$\text{donde } \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{G}^1 \check{\mathbf{A}} \mathbf{G}^2 + (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{G}^3 \check{\mathbf{C}} \mathbf{G}^2 \\ \mathbf{B} = \mathbf{G}^1 \check{\mathbf{B}} \mathbf{G}^2 + (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{G}^3 \check{\mathbf{D}} \mathbf{G}^2 \\ \mathbf{C} = \mathbf{G}^1 \check{\mathbf{C}} \mathbf{G}^2 + \frac{h^2}{12} (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{G}^3 \check{\mathbf{A}} \mathbf{G}^2 \\ \mathbf{D} = \mathbf{G}^1 \check{\mathbf{D}} \mathbf{G}^2 + \frac{h^2}{12} (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{G}^3 \check{\mathbf{B}} \mathbf{G}^2 \end{cases} \quad (7.34)$$

En la ecuación anterior, las matrices \mathbf{G}^1 , \mathbf{G}^2 y \mathbf{G}^3 son

$$\mathbf{G}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.35)$$

Las matrices $\check{\mathbf{A}}$, $\check{\mathbf{B}}$, $\check{\mathbf{C}}$ y $\check{\mathbf{D}}$ que aparecen en la ecuación (7.34) están definidas por

$$\begin{cases} \check{\mathbf{A}} = (\check{\mathbf{C}}^{\mathbf{A}})^{-1}, & \check{\mathbf{D}} = \frac{h^2}{12} \check{\mathbf{A}} \\ \check{\mathbf{B}} = -\check{\mathbf{A}} (\check{\mathbf{C}}^{\mathbf{B}1} + \check{\mathbf{C}}^{\mathbf{B}2}) \check{\mathbf{D}}, & \check{\mathbf{C}} = -\check{\mathbf{D}} (\check{\mathbf{C}}^{\mathbf{C}1} + \check{\mathbf{C}}^{\mathbf{C}2}) \check{\mathbf{A}} \end{cases} \quad (7.36)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\mathbf{C}}^{\mathbf{A}} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1122} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & 2S_{2212} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 4S_{1212} \end{pmatrix}, \\ \check{\mathbf{C}}^{\mathbf{B1}} = \check{\mathbf{C}}^{\mathbf{C1}} = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{h} \begin{pmatrix} S_{1111} & 0 & 0 \\ 0 & -S_{2222} & -2S_{2212} \\ S_{1112} & -S_{2212} & -2S_{1212} \end{pmatrix}, \\ \check{\mathbf{C}}^{\mathbf{B2}} = -\frac{1}{10h} \begin{pmatrix} 6S_{11}^C \kappa_1 & S_{22}^C \kappa_1 + 5S_{11}^C \kappa_2 & 2S_{12}^C \kappa_1 \\ S_{11}^C \kappa_2 + 5S_{22}^C \kappa_1 & 6S_{22}^C \kappa_2 & 2S_{12}^C \kappa_2 \\ 10S_{12}^C \kappa_1 & 10S_{12}^C \kappa_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \check{\mathbf{C}}^{\mathbf{C2}} = -\frac{1}{10h} \begin{pmatrix} 6S_{11}^C \kappa_1 & 5S_{22}^C \kappa_1 + S_{11}^C \kappa_2 & 10S_{12}^C \kappa_1 \\ 5S_{11}^C \kappa_2 + S_{22}^C \kappa_1 & 6S_{22}^C \kappa_2 & 10S_{12}^C \kappa_2 \\ 2S_{12}^C \kappa_1 & 2S_{12}^C \kappa_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (7.37)$$

- los vectores \mathbf{k}^+ , \mathbf{k}^- y \mathbf{k}^3 están dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \check{\mathbf{k}}_N^+ + (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{G}^3 \check{\mathbf{k}}_M^+ \\ \mathbf{G}^1 \check{\mathbf{k}}_M^+ + \frac{h^2}{12} (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{G}^3 \check{\mathbf{k}}_N^+ \end{pmatrix} \\ \mathbf{k}^- = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \check{\mathbf{k}}_N^- + (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{G}^3 \check{\mathbf{k}}_M^- \\ \mathbf{G}^1 \check{\mathbf{k}}_M^- + \frac{h^2}{12} (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{G}^3 \check{\mathbf{k}}_N^- \end{pmatrix} \\ \mathbf{k}^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \check{\mathbf{k}}_N^3 + (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{G}^3 \check{\mathbf{k}}_M^3 \\ \mathbf{G}^1 \check{\mathbf{k}}_M^3 + \frac{h^2}{12} (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{G}^3 \check{\mathbf{k}}_N^3 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (7.38)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\mathbf{k}}_N^+ = \check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{c}}_\chi^+ + \check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{c}}_\epsilon^+, \quad \check{\mathbf{k}}_N^- = \check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{c}}_\chi^- + \check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{c}}_\epsilon^-, \quad \check{\mathbf{k}}_N^3 = \check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{c}}_\chi^3 + \check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{c}}_\epsilon^3, \\ \check{\mathbf{k}}_M^+ = \check{\mathbf{C}}\check{\mathbf{c}}_\epsilon^+ + \check{\mathbf{D}}\check{\mathbf{c}}_\chi^+, \quad \check{\mathbf{k}}_M^- = \check{\mathbf{C}}\check{\mathbf{c}}_\epsilon^- + \check{\mathbf{D}}\check{\mathbf{c}}_\chi^-, \quad \check{\mathbf{k}}_M^3 = \check{\mathbf{C}}\check{\mathbf{c}}_\epsilon^3 + \check{\mathbf{D}}\check{\mathbf{c}}_\chi^3, \\ \check{\mathbf{c}}_\epsilon^+ = 3h \frac{S^\sigma}{140} \check{\mathbf{c}}^a - \frac{1}{60} \check{\mathbf{C}}^S (15\check{\mathbf{c}}^b + 8h\check{\mathbf{c}}^c + 5h\check{\mathbf{c}}^d), \\ \check{\mathbf{c}}_\epsilon^- = 3h \frac{S^\sigma}{140} \check{\mathbf{c}}^a - \frac{1}{60} \check{\mathbf{C}}^S (-15\check{\mathbf{c}}^b + 8h\check{\mathbf{c}}^c + 5h\check{\mathbf{c}}^d), \\ \check{\mathbf{c}}_\epsilon^3 = \frac{h^2 S^\sigma}{210} \check{\mathbf{c}}^a - \frac{1}{120} h^2 \check{\mathbf{C}}^S (6\check{\mathbf{c}}^c + 5\check{\mathbf{c}}^d), \\ \check{\mathbf{c}}_\chi^+ = \frac{S^\sigma}{2} \check{\mathbf{c}}^a - \frac{1}{60h} \check{\mathbf{C}}^S (36\check{\mathbf{c}}^b + 18h\check{\mathbf{c}}^c + 3h\check{\mathbf{c}}^d), \\ \check{\mathbf{c}}_\chi^- = -\frac{S^\sigma}{2} \check{\mathbf{c}}^a - \frac{1}{60h} \check{\mathbf{C}}^S (36\check{\mathbf{c}}^b - 18h\check{\mathbf{c}}^c - 3h\check{\mathbf{c}}^d) \text{ y} \\ \check{\mathbf{c}}_\chi^3 = -\frac{1}{10} \check{\mathbf{C}}^S \check{\mathbf{c}}^b \end{array} \right. \quad (7.39)$$

En las definiciones anteriores, la matriz $\check{\mathbf{C}}^S$ y los vectores $\check{\mathbf{c}}^a$, $\check{\mathbf{c}}^b$ y $\check{\mathbf{c}}^c$ son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\mathbf{C}}^S = \begin{pmatrix} S_{11}^C & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}^C & 0 \\ 0 & 0 & S_{12}^C \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{c}}^a = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{c}}^b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \check{\mathbf{c}}^c = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_1 + \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \check{\mathbf{c}}^d = \begin{pmatrix} \kappa_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_1 + \kappa_2 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (7.40)$$

- Las matrices \mathbf{L} , \mathbf{L}^+ y \mathbf{L}^- son definidas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L} = \frac{6}{5h} \begin{pmatrix} S_{11}^Q & S_{12}^Q \\ S_{21}^Q & S_{22}^Q \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{L}^+ = \frac{1}{60} \mathbf{L} \cdot \begin{pmatrix} S_{11}^Q(6 + 5h\kappa_2) & S_{12}^Q(6 + 6h\kappa_1 - h\kappa_2) \\ S_{21}^Q(6 - h\kappa_1 + 6h\kappa_2) & S_{22}^Q(6 + 5h\kappa_1) \end{pmatrix} \text{ y} \\ \mathbf{L}^- = -\frac{1}{60} \mathbf{L} \cdot \begin{pmatrix} S_{11}^Q(6 - 5h\kappa_2) & S_{12}^Q(6 - 6h\kappa_1 + h\kappa_2) \\ S_{21}^Q(6 + h\kappa_1 - 6h\kappa_2) & S_{22}^Q(6 - 5h\kappa_1) \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (7.41)$$

B. Coeficientes de la aproximación de esfuerzos del modelo SAM-L.

En este anexo se muestran los coeficientes de la aproximación de esfuerzos del modelo SAM-L en función de sus fuerzas generalizadas. Los coeficientes tienen las siguientes formas:

- para $\sigma_{\alpha\beta}^{k,i}$ ($0 \leq k \leq 1$):

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^{0,i} = \frac{1}{h_i} \left[\left(\underline{\mathbf{N}}^i - \underline{\mathbf{M}}^i \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right) \cdot \mathbf{e}_\beta \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \sigma_{\alpha\beta}^{1,i} = \left[\left(\frac{12}{h_i^2} \underline{\mathbf{M}}^i - \underline{\mathbf{N}}^i \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right) \cdot \mathbf{e}_\beta \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \end{cases} \quad (7.42)$$

- para $\sigma_{\alpha 3}^{k,i}$ ($0 \leq k \leq 3$):

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha 3}^{0,i} = \left[\frac{1}{h_i} \underline{\mathbf{Q}}^i - \frac{h_i}{12} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \cdot \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \sigma_{\alpha 3}^{1,i} = \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} \right) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{5} \sigma_{\alpha 3}^{3,i} \\ \sigma_{\alpha 3}^{2,i} = \left[\frac{1}{h_i} \underline{\mathbf{Q}}^i - \frac{\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i}}{2} - \frac{h_i}{12} \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \cdot \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \sigma_{\alpha 3}^{3,i} = \left[2 \underline{\text{div}}^i \left(\underline{\mathbf{M}}^i \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right) - 2 \left(\kappa_1^i + \kappa_2^i \right) \underline{\text{div}}^i \underline{\mathbf{M}}^i \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \quad + \left(\kappa_1^i + \kappa_2^i \right) \left[h_i \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} \right) - 2 \underline{\mathbf{Q}}^i \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \quad - \left(4 \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i + 3 \underline{\boldsymbol{\kappa}}'^i \right) \cdot \left[\underline{\mathbf{Q}}^i - \frac{\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i}}{2} \right] \cdot \mathbf{e}_\alpha \end{cases} \quad (7.43)$$

- para σ_{33}^{ki} ($0 \leq k \leq 4$):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_{33}^{0i} = \frac{\sigma^{i,i+1} + \sigma^{i-1,i}}{2} + \sigma_{33}^{2i} + \frac{1}{15} \sigma_{33}^{4i} \\
 \sigma_{33}^{1i} = \sigma^{i,i+1} - \sigma^{i-1,i} + \frac{1}{5} \sigma_{33}^{3i} \\
 \sigma_{33}^{2i} = \frac{h_i}{30} \operatorname{div}^i \left[\underline{\operatorname{div}}^i \left(\underline{\underline{\mathbf{M}}}^i \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) - 2 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^i \right] - \frac{1}{h_i} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^i : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i - \frac{1}{15} \sigma_{33}^{4i} \\
 \quad + \frac{h_i}{12} \operatorname{div}^i \left[\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} + \frac{h_i}{10} \left(4 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + 5 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) \cdot \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} \right) \right] \\
 \quad + \frac{h_i}{12} \left(\kappa_1^i + \kappa_2^i \right) \left(\sigma_{33}^{1i} - \frac{1}{5} \sigma_{33}^{3i} + \frac{4}{5} \sigma_{33}^{4i} - \operatorname{div}^i \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^i \right) \\
 \quad - \frac{h_i}{30} \operatorname{div}^i \left[\left(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) \cdot \underline{\operatorname{div}}^i \underline{\underline{\mathbf{M}}}^i \right] + \frac{h_i}{30} \operatorname{div}^i \left[\left(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^i \right] \\
 \quad - \frac{h_i^2}{60} \operatorname{div}^i \left[\left(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) \cdot \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} \right) \right] \\
 \sigma_{33}^{3i} = -\operatorname{div}^i \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^i + \frac{h_i}{4} \operatorname{div}^i \left[2 \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} \right) - h_i \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i \cdot \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} \right) \right] \\
 \sigma_{33}^{4i} = -\frac{3h_i}{14} \operatorname{div}^i \left[\underline{\operatorname{div}}^i \left(\underline{\underline{\mathbf{M}}}^i \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) \right] + \frac{3h_i}{7} \operatorname{div}^i \left[\left(2 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^i \right] \\
 \quad - \frac{3h_i^2}{14} \operatorname{div}^i \left[\left(2 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) \cdot \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} \right) \right] \\
 \quad + \frac{3h_i}{14} \operatorname{div}^i \left[\left(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) \cdot \underline{\operatorname{div}}^i \underline{\underline{\mathbf{M}}}^i \right] - \frac{3h_i}{14} \operatorname{div}^i \left[\left(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^i \right] \\
 \quad + \frac{3h_i^2}{28} \operatorname{div}^i \left[\left(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^i + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}'^i \right) \cdot \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i} \right) \right]
 \end{array} \right. \quad (7.44)$$

Referencias.

- [1] Marco Esparza Luis Valdez, Carlos Garay. Aleaciones de aluminio calidad en la industria aeroespacial, 2019.
- [2] Esben Byskov. *Elementary Continuum Mechanics for Everyone*. Springer Netherlands, 2013.
- [3] Robert Jones. *Mechanics of composite materials*. Taylor & Francis, Philadelphia, PA, 1999.
- [4] J.N. Reddy. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. CRC Press, 2 edition, November 2003.
- [5] Djebbara Benzerga, Abdelkader Haddi, and Antoine Lavie. Delamination model using damage mechanics applied to new composite for orthopaedic use. *Interface*, 3(2):1, 2014.
- [6] G. Giunta, E. Carrera, and S. Belouettar. Free vibration analysis of composite plates via refined theories accounting for uncertainties. *Shock and Vibration*, 18(4):537–554, 2011.
- [7] Alberto Díaz Díaz. *Délamination des matériaux multicouche: phénomènes, modèles et critères*. PhD thesis, L'ecole nationale des ponts et chaussees, 2001.
- [8] Phill-Seung Lee and Klaus-Jürgen Bathe. Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computers & Structures*, 82(11-12):945–962, may 2004.
- [9] Rene Alvarez-Lima, Alberto Diaz-Diaz, Jean-François Caron, and Sylvain Chataigner. Enhanced layerwise model for laminates with imperfect interfaces. Part 1. equations and theoretical validation. *Composite Structures*, 94(5):1694–1702, 2012.
- [10] E. Reissner. On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 29:90–95, 1950.

- [11] David Hilbert Richard Courant. *Methods of Mathematical Physics*. Wiley VCH, 1989.
- [12] Lawrence Malvern. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1969.
- [13] Jean Salençon. *Handbook of Continuum Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [14] Javier Oliver and Carlos Agelet De Saracibar. *Continuum Mechanics for Engineers. Theory and Problems (First edition, September 2016)*. The Authors, 2016.
- [15] Woldemar Voigt. Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper. *Annalen der physik*, 274(12):573–587, 1889.
- [16] Wei Ding et al. *Delamination analysis of composite laminates*. University of Toronto, 2000.
- [17] Pavel Grinfeld. *Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving Surfaces*. Springer-Verlag GmbH, 2013.
- [18] Eduard Ventsel, Theodor Krauthammer, and E Carrera. Thin plates and shells: theory, analysis, and applications. *Appl. Mech. Rev.*, 55(4):B72–B73, 2002.
- [19] Arthur W Leissa. Vibration of plates. Technical report, Ohio State Univ Columbus, 1969.
- [20] Arthur W Leissa. *Vibration of shells*, volume 288. Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration Washington, 1973.
- [21] Augustus Edward Hough Love. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 179:491–546, 1888.
- [22] RD Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18:31, 1951.
- [23] Erasmo Carrera. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9(2):87–140, 2002.
- [24] Junuthula N Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51(4):745–752, 1984.

- [25] Erasmo Carrera. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 56(3):287–308, 2003.
- [26] Arthur Lebée and Karam Sab. A bending-gradient model for thick plates. Part I: Theory. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20):2878–2888, 2011.
- [27] Arthur Lebée and Karam Sab. On the generalization of reissner plate theory to laminated plates. Part I: Theory. *Journal of Elasticity*, 126(1):39–66, 2017.
- [28] Erasmo Carrera and Angelo Ciuffreda. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Composite Structures*, 69(3):271–293, jul 2005.
- [29] Erasmo Carrera. CZ° requirements—models for the two dimensional analysis of multilayered structures. *Composite Structures*, 37(3-4):373–383, mar 1997.
- [30] F.G. Canales and J.L. Mantari. Laminated composite plates in contact with a bounded fluid: Free vibration analysis via unified formulation. *Composite Structures*, 162:374–387, feb 2017.
- [31] FG Canales and JL Mantari. Free vibration of thick isotropic and laminated beams with arbitrary boundary conditions via unified formulation and ritz method. *Applied Mathematical Modelling*, 61:693–708, sep 2018.
- [32] Amirhadi Alesadi, Marzieh Galehdari, and Saeed Shojaee. Free vibration and buckling analysis of cross-ply laminated composite plates using carrera's unified formulation based on isogeometric approach. *Computers & Structures*, 183:38–47, apr 2017.
- [33] Marcelo L. Ribeiro, Gregório F.O. Ferreira, Ricardo de Medeiros, António J.M. Ferreira, and Volnei Tita. Experimental and numerical dynamic analysis of laminate plates via carrera unified formulation. *Composite Structures*, 202:1176–1185, oct 2018.
- [34] A. Pagani, R. Augello, and E. Carrera. Frequency and mode change in the large deflection and post-buckling of compact and thin-walled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 432:88–104, oct 2018.
- [35] J.L. Mantari and J.C. Monge. Buckling, free vibration and bending analysis of functionally graded sandwich plates based on an optimized hyperbolic unified formulation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 119:170–186, dec 2016.

- [36] A. Pagani, R. Augello, and E. Carrera. Frequency and mode change in the large deflection and post-buckling of compact and thin-walled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 432:88–104, oct 2018.
- [37] B. Wu, A. Pagani, M. Filippi, W.Q. Chen, and E. Carrera. Large-deflection and post-buckling analyses of isotropic rectangular plates by carrera unified formulation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 116:18–31, nov 2019.
- [38] N.J. Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 14(5):385–400, 1978.
- [39] Armelle Chabot. *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4)*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [40] Jean-François Caron, Rui Pedro Carreira, and Alberto Diaz Diaz. Critère d'initiation de délaminage dans les stratifiés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 327(13):1291–1296, dec 1999.
- [41] Alberto Diaz Diaz, Jean-François Caron, and Rui Pedro Carreira. Un modèle de stratifiés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 329(12):873–879, dec 2001.
- [42] A. Chabot, M. Hun, and F. Hammoum. Mechanical analysis of a mixed mode debonding test for “composite” pavements. *Construction and Building Materials*, 40:1076–1087, mar 2013.
- [43] Alberto Diaz Diaz and Jean-François Caron. Prediction of the onset of mode III delamination in carbon-epoxy laminates. *Composite Structures*, 72(4):438–445, apr 2006.
- [44] J.F. Caron and R.P. Carreira. Interface behaviour in laminates with simplified model. *Composites Science and Technology*, 63(5):633–640, apr 2003.
- [45] Viet-Tung Nguyen and Jean-Francois Caron. Finite element analysis of free-edge stresses in composite laminates under mechanical an thermal loading. *Composites Science and Technology*, 69(1):40–49, jan 2009.
- [46] Achille Lerpiniere, Jean-François Caron, Alberto Diaz Diaz, and Karam Sab. The ls1 model for delamination propagation in multilayered materials at $0^\circ/\theta^\circ$ interfaces:

- A comparison between experimental and finite elements strain energy release rates. *International Journal of Solids and Structures*, 51(23-24):3973–3986, 2014.
- [47] J.F. Caron, A. Diaz Diaz, R.P. Carreira, A. Chabot, and A. Ehrlacher. Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Science and Technology*, 66(6):755–765, may 2006.
- [48] Alberto Diaz Diaz, Réda Hadj-Ahmed, Gilles Foret, and Alain Ehrlacher. Stress analysis in a classical double lap, adhesively bonded joint with a layerwise model. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 29(1):67–76, jan 2009.
- [49] Alberto Diaz Diaz, Jean-François Caron, and Rui Pedro Carreira. Software application for evaluating interfacial stresses in inelastic symmetrical laminates with free edges. *Composite Structures*, 58(2):195–208, nov 2002.
- [50] Gilberto Sandino Aquino de los Ríos, Rubén Castañeda Balderas, Van Anh Duong, Sylvain Chataigner, Jean-François Caron, Alain Ehrlacher, Gilles Foret, and Alberto Diaz Diaz. Laminated materials with plastic interfaces: modeling and calculation. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(2):025008, jan 2009.
- [51] H. Nasser and A. Chabot. A half-analytical elastic solution for 2d analysis of cracked pavements. *Advances in Engineering Software*, 117:107–122, mar 2018.
- [52] J Lyell Sanders Jr. *An improved first-approximation theory for thin shells*. NASA TR-R24. US Government Printing Office, Washington, DC, 1959.
- [53] Stephen P Timoshenko and Sergius Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. McGraw-hill, 1959.
- [54] Lur’ye A.I. General theory of elastic shells. *Prikl Mat Mekh*, 4(4):7–34, 1940.
- [55] W Flugge. *Stresses in shells*. Springer-Verlag, 1966.
- [56] Ralph Byrne. *Theory of small deformations of the thin elastic shell*. University of California Press, 1944.
- [57] Paul Mansour Naghdi. The theory of shells and plates. In *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity*, pages 425–640. Springer, 1973.
- [58] Junuthula Narasimha Reddy. *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press, 2006.

- [59] M. H. Toorani and A. A. Lakis. General equations of anisotropic plates and shells including transverse shear deformations, rotary inertia and initial curvature effects. *Journal of Sound and Vibration*, 237(4):561 – 615, 2000.
- [60] M. H. Toorani and A. A. Lakis. Free vibrations of non-uniform composite cylindrical shells. *Nuclear Engineering and Design*, 236(17):1748–1758, 2006.
- [61] David D. Fox. Transverse shear and normal stresses in nonlinear shell theory. *Computers & Structures*, 75(3):313 – 319, 2000.
- [62] Francesco Tornabene and Erasmo Viola. Static analysis of functionally graded doubly-curved shells and panels of revolution. *Meccanica*, 48(4):901–930, May 2013.
- [63] Erasmo Viola, Francesco Tornabene, and Nicholas Fantuzzi. Static analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels using general higher-order shear deformation theories. *Composite Structures*, 101:59 – 93, 2013.
- [64] E Trefftz. Ableitung der schalenbiegungsgleichungen mit dem castiglianoschen prinzip. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 15(1-2):101–108, 1935.
- [65] Eric Reissner. A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells. *American Journal of Mathematics*, 63(1):177–184, 1941.
- [66] JL Synge and WZ Chien. The intrinsic theory of elastic shells and plates. *Theodore von Karman Anniversary Volume, California Institute of Technology*, pages 103–120, 1941.
- [67] Wei-Zang Chien. The intrinsic theory of thin shells and plates. i. general theory. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1(4):297–327, 1944.
- [68] Ying-Guang Fang, Ji-Hao Pan, and Wei-Xin Chen. Theory of thick-walled shells and its application in cylindrical shell. *Applied Mathematics and Mechanics*, 13(11):1055–1065, Nov 1992.
- [69] George Z Voyiadjis and Guangyu Shi. A refined two-dimensional theory for thick cylindrical shells. *International Journal of Solids and Structures*, 27(3):261–282, 1991.
- [70] George Z. Voyiadjis and Pawel Woelke. A refined theory for thick spherical shells. *International Journal of Solids and Structures*, 41(14):3747 – 3769, 2004.

- [71] William Rowan Hamilton. On a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 124:247–308, 1834.
- [72] William Rowan Hamilton. Second essay on a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 125:95–144, 1835.
- [73] Dominique Chapelle and Klaus-Jürgen Bathe. *The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [74] Klaus-jürgen Bathe and Said Bolourchi. A geometric and material nonlinear plate and shell element. *Computers & structures*, 11(1-2):23–48, 1980.
- [75] KJ Bathe and EN Dvorkin. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis,— nternat. *J. Comput. Aided Engrg. Software*, 1, 1984.
- [76] Phill-Seung Lee and Klaus-Jürgen Bathe. The quadratic mitc plate and mitc shell elements in plate bending. *Advances in Engineering Software*, 41(5):712–728, 2010.
- [77] E Hernández, L Hervella-Nieto, and R Rodriguez. Computation of the vibration modes of plates and shells by low-order mitc quadrilateral finite elements. *Computers & structures*, 81(8-11):615–628, 2003.
- [78] Christos Xenophontos, Jason Kurtz, and Scott Fulton. A p-version MITC finite element method for reissner–mindlin plates with curved boundaries. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 192(2):374–395, aug 2006.
- [79] Jin Xu, C.K. Lee, and K.H. Tan. An enriched 6-node MITC plate element for yield line analysis. *Computers & Structures*, 128:64–76, nov 2013.
- [80] Yeongbin Ko, Phill-Seung Lee, and Klaus-Jürgen Bathe. A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element. *Computers & Structures*, 192:34–49, nov 2017.
- [81] D. Trimarchi, M. Vidrascu, D. Taunton, S.R. Turnock, and D. Chapelle. Wrinkle development analysis in thin sail-like structures using MITC shell finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 64:48–64, feb 2013.
- [82] Klaus-Jürgen Bathe, Alexander Iosilevich, and Dominique Chapelle. An evaluation of the MITC shell elements. *Computers & Structures*, 75(1):1–30, mar 2000.

- [83] Mikko Lyly, Jarkko Niiranen, and Rolf Stenberg. Superconvergence and postprocessing of MITC plate elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33-34):3110–3126, jul 2007.
- [84] D. Chapelle and I. Paris Suarez. Detailed reliability assessment of triangular MITC elements for thin shells. *Computers & Structures*, 86(23-24):2192–2202, dec 2008.
- [85] R. Serpieri, S. Sessa, and L. Rosati. A MITC-based procedure for the numerical integration of a continuum elastic-plastic theory of through-the-thickness-jacketed shell structures. *Composite Structures*, 191:209–220, may 2018.
- [86] Claudia Chinosi, Maria Cinefra, Lucia Della Croce, and Erasmo Carrera. Reissner’s mixed variational theorem toward MITC finite elements for multilayered plates. *Composite Structures*, 99:443–452, may 2013.
- [87] Claudia Chinosi, Lucia Della Croce, Maria Cinefra, and Erasmo Carrera. Approximation of anisotropic multilayered plates through RMVT and MITC elements. *Composite Structures*, 158:252–261, dec 2016.
- [88] Maria Cinefra, Claudia Chinosi, Lucia Della Croce, and Erasmo Carrera. Refined shell finite elements based on RMVT and MITC for the analysis of laminated structures. *Composite Structures*, 113:492–497, jul 2014.
- [89] A. Alaimo, A. Milazzo, and C. Orlando. A four-node MITC finite element for magneto-electro-elastic multilayered plates. *Computers & Structures*, 129:120–133, dec 2013.
- [90] M. Kögl and M.L. Bucalem. Analysis of smart laminates using piezoelectric MITC plate and shell elements. *Computers & Structures*, 83(15-16):1153–1163, jun 2005.
- [91] Eric Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, pages 69–77, 1945.