

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATERIALES AVANZADOS



Maestría en Ciencia y Tecnología Ambiental

Tesis:

**Modelado y Simulación de fenómenos
inelásticos en materiales compuestos
laminados**

Presenta:

Gilberto Sandino Aquino De los Ríos

Asesores:

Dr. Alberto Díaz Díaz

2 de febrero 2005

Índice general

1. Simulación de daño y plasticidad homogenizados en laminados	9
1.1. Introducción	9
1.2. Generalidades de compósitos unidireccionales y su comportamiento	10
1.2.1. Notación ingenieril	10
1.2.2. Comportamiento elástico de compósitos unidireccionales	11
1.2.3. Comportamiento con daño de compósitos unidireccionales	13
1.2.4. Plasticidad	16
1.2.5. Teoría clásica de placas laminadas	18
1.3. Multicapa Inelástico en tensión	21
1.4. Resultados	23
1.5. Conclusiones	25
2. Adaptación de las ecuaciones de evolución y criterio plástico al modelo M4-5n	31
2.1. Introducción	31
2.2. Modelos multipartícula	33
2.2.1. Método de aproximación de Hellinger-Reissner	34
2.2.2. Ecuaciones elásticas del modelo M4-5n	36
2.3. Desarrollo de las ecuaciones plásticas generalizadas	40
2.3.1. Determinación de las ecuaciones de evolución plástica generalizada de la capa	41
2.3.2. Determinación de la función de criterio plástico en esfuerzos generalizados de la capa	43
2.3.3. Determinación de las ecuaciones de evolución y criterio de plasticidad de la interfase	44
2.4. Conclusiones	46
3. Cálculo de efecto de borde en un multicapa plástico en tensión	47
3.1. Introducción	47
3.2. Planteamiento del problema	48
3.3. Implementación numérica	49
3.4. Validación	51
3.5. Estabilidad y convergencia del algoritmo.	56
3.6. Ejemplo de aplicación	56
3.7. Conclusiones	59

Conclusión general	60
Referencias Bibliográficas.	63

Índice de figuras

1.1. Multicapas simétrico $(0, 90)_s$	10
1.2. Capa unidireccional en el sistema de ejes locales	11
1.3. Definición de los sistemas globales y locales	12
1.4. Representacion de daño en una capa de fibras unidireccionales.	13
1.5. Ejemplo de cálculo del esfuerzo efectivo.	14
1.6. Comportamiento del endurecimiento plástico	17
1.7. Ejemplo de multicapa y convención adoptada para los ejes.	18
1.8. deformaciones de tensión y flexión	19
1.9. Esfuerzos generalizados	20
1.10. Multicapas sometidos a tensión	21
1.11. Método de solución elástica	23
1.12. Diagrama de flujo del algoritmo	24
1.13. Módulos de plasticidad y daño	25
1.14. Curva esfuerzo deformación simulada de un multicapa de 30 grados vs el resultado analítico	26
1.15. Curva esfuerzo deformación simulada de un multicapa de 60 grados vs al resultado analítico	26
1.16. Curva esfuerzo deformación simulada de un multicapa de 30 grados vs experimento	27
1.17. Curva esfuerzo deformación comparando un $[45 -45]$ con un unidireccional a 45	27
1.18. Curva esfuerzo deformación de un $(45, 30)_s$ con diferentes tipos de comportamiento.	28
1.19. Curva esfuerzo deformación.	28
2.1. Acercamiento multipartícula de multicapas.	33
2.2. Geometría de los multicapas estudiados	34
2.3. deslizamiento observado en la interfase de un multicapa simétrico $[\theta, -\theta]$	41
2.4. discontinuidad de desplazamiento vertical en la interfase	45
3.1. Laminado en tensión	48
3.2. Diagrama de flujo del algoritmo de plasticidad en capa e interfase.	50
3.3. Gráfica esfuerzo-deformación de un laminado unidireccional de 90. Comparación analítico - M4-5N plástico	52
3.4. Gráfica esfuerzo-deformación de un laminado unidireccional de 45. Comparación analítico - M4-5N plástico	52

3.5. Gráfica esfuerzo-deformación de un laminado $[0\ 90]_s$. Comparación TCPL - M4-5N plástico	53
3.6. Gráfica de esfuerzo σ_{11} en la capa de 90 para $\varepsilon=0.25\%$. Comparación - M4-5N plástico	54
3.7. Gráfica de esfuerzo σ_{11} en la capa de 90 para $\varepsilon=0.4\%$. Comparación TCPL- M4-5N plástico	54
3.8. Gráfica de deformación plástica ε_{11}^{an} en la capa de 90 para 0.32% . Comparación TCPL- M4-5N plástico	55
3.9. Gráfica de deformación plástica ε_{11}^{an} en la capa de 90 para 0.4% . Comparación TCPL- M4-5N plástico	55
3.10. Gráfica de τ_{yz} vs. γ_y en el borde para tres diferentes pasos de incremento .	57
3.11. Gráfica de τ_{yz} - <i>distancia</i> para dos diferentes simulaciones plásticas	58
3.12. Gráfica de γ_y - <i>distancia</i> para dos simulaciones plásticas diferentes	58

Introducción general

A mediados del siglo XX las necesidades por obtener nuevos materiales con características superiores y únicas produjo la creación de los hoy llamados materiales compuestos. Una definición básica de material compuesto es la combinación de dos ó mas materiales que producen un material cuyas características no se pueden obtener a través de los materiales utilizados individualmente[1]. Los materiales compuestos, sobre todo los estructurales, presentan una relación resistencia/densidad alta, por lo cual los hace apreciados para aplicaciones en la industria aeroespacial y automotriz.

El comportamiento y las propiedades mecánicas del material compuesto están determinadas por cuatro factores principales: primero por las propiedades mecánicas de cada uno de los materiales que constituyen al compuesto, segundo por el porcentaje en volumen de cada uno de los componentes, tercero por la geometría de los constituyentes y cuarto la interacción que exista entre los componentes. La geometría (distribución y orientación) de los componentes es tan importante que se han establecido técnicas matemáticas, como la homogenización para poder predecir y simular las propiedades del compuesto. Un ejemplo de la aplicación de técnicas de homogenización es la conocida ley de mezclas utilizada comúnmente en los polímeros reforzados por fibras largas unidireccionales (fibras paralelas) [1]. Estos últimos compuestos tienen la característica de tener una gran resistencia en una dirección determinada, presentando una simetría ortotrópica. Los materiales reforzados con fibras tienen una variante denominada hoja “prepreg” la cual consiste de una matriz polimérica (usualmente epóxica sin polimerizar) y fibras largas de vidrio o de carbono unidireccionales. Se cortan varias hojas y se apilan unas sobre otras formando así un material compuesto multicapa. Dependiendo de la secuencia de apilamiento de las capas y de la orientación de sus fibras se obtendrán propiedades mecánicas diferentes.

Los laminados hechos de capas de compuestos unidireccionales normalmente se modelan a través de la teoría clásica de placas laminadas (TCPL) [1], la cual realiza una simplificación de la geometría tridimensional del laminado a una bidimensional, ya que una de las dimensiones (el espesor) del laminado es bastante menor que las otras dos. Esta teoría (TCPL) se desarrolló inicialmente y se aplica casi siempre suponiendo un comportamiento lineal elástico, además se supone una unión perfecta entre las capas. El acercamiento es una aproximación adecuada para ciertas condiciones de carga, pero padece de una importante limitación ya que se deben utilizar factores de seguridad grandes cuando hay incertidumbre sobre el comportamiento lineal elástico de los materiales. Esto se traduce en un mayor costo de producción por posibles excesos de material, además en ciertas aplicaciones el peso es crítico, lo cual nos obliga a una búsqueda continua para minimizar la cantidad de material a utilizar. Para poder optimizar el diseño de los materiales es necesario el poder predecir

los fenómenos no lineales que se presentan cuando se excede la zona elástica. Dos de los fenómenos inelásticos más importantes son la plasticidad y el daño, ya que el primero provoca que se grabe una deformación en el material y el segundo nos puede indicar el momento de falla y la evolución de la propagación de microgrietas en el laminado.

El presente trabajo tiene como primer objetivo el acoplar comportamientos inelásticos como daño y plasticidad a la teoría clásica de placas (TCPL) para obtener una primera aproximación. El comportamiento para una capa de fibras unidireccionales se basa en el modelo de Allix [18] el cual se adaptó para utilizarlo en un multicapa sometido a tensión y modelado por la teoría TCPL. La teoría TCPL permite modelar correctamente el comportamiento global de una estructura y evalúa correctamente los esfuerzos y deformaciones lejos de los bordes de la estructura. El defecto de esta teoría es el no poder modelar los efectos de borde sobre los esfuerzos entre las capas. Estos efectos de borde provocan a menudo la delaminación (decohesión de la capas) y ésta a su vez provoca la falla repentina de la estructura. Por estas razones, la TCPL no puede predecir fallas por delaminación en las estructuras multicapa. Nuestro segundo objetivo es entonces el introducir el modelo plástico de Allix [18] en un modelo de placas más complejo que la TCPL llamado M4-5N y que permite analizar los efectos de borde y evaluar los efectos de interfase entre las capas. Este modelo M4-5N ya fue desarrollado y validado para multicapas elásticos por Díaz et. al en [23]. En este objetivo está implícita la implementación numérica del modelo desarrollado con plasticidad en esta tesis. Es importante recalcar que los dos objetivos de la tesis tienen aplicaciones y alcances diferentes, el primero ayudaría a predecir un comportamiento global del laminado suponiendo una plasticidad y un daño homogéneo en la capa y el segundo objetivo ayudaría a evaluar la plasticidad no homogénea en las capas y en las interfases entre las mismas, así como a predecir el inicio de delaminación.

Esta tesis consta de tres capítulos y de una conclusión general. El capítulo uno presenta el desarrollo e implementación del modelo de plasticidad y daño en un programa numérico utilizando la TCPL. El capítulo dos muestra el desarrollo del modelo M4-5N para tomar en cuenta el modelo de plasticidad. El capítulo tres contiene la implementación numérica del modelo M4-5N con plasticidad y los resultados correspondientes.

Capítulo 1

Simulación de daño y plasticidad homogenizados en laminados

1.1. Introducción

La plasticidad es un fenómeno muy común en los metales y en los polímeros. En los compósitos de matriz polimérica, de igual manera presentan plasticidad en su comportamiento mecánico. Otro fenómeno que ocurre en dichos compósitos es el micro-agrietamiento (llamado daño) en la matriz y en la interfase. Comúnmente la plasticidad y el daño han sido tratados por separado por la dificultad que presenta el manejar ambos comportamientos, sobre todo en materiales multicapas [2]. El comportamiento plástico de materiales compuestos reforzados con fibra ha sido estudiado por Sun & Chen [3], Surrel & Vautrin [4], Galvanetto et. al. [5]. El mecanismo de daño de los materiales ha sido estudiado por Lemaitre[6], Krajcinovic[7], Krajcinovic [8], Foneska Murakami[9], Betten[10], Voyiadjis y Park[11], Ladeveze[12, 13], Allix[14]. Estos autores proponen diferentes modelos de evolución de daño. Algunos proponen una medida escalar de daño isotrópico, como JU [15] y Johansson & Runesson[16]. Allix et. al [18] proponen un tensor de rango uno, otros utilizan un tensor de segundo orden como Voyiadjis & Guelzim[17] y Voyiadjis & Park[11]. El acoplamiento de daño y deformaciones inelásticas en materiales compuestos ha sido estudiado por Allix[18], Voyiadjis & Guelzim [17], Voyiadjis & Kattan [19], Voyiadjis & Deliktas [20], Boubakar et. al. [21]. Todos parten de principios energéticos para el plantamiento de las ecuaciones de daño y utilizan la ecuación anisotrópica de plasticidad.

Revisando la literatura, las opciones para mejorar la simulación del comportamiento mecánico del material son básicamente cuatro: plasticidad, daño, viscoplasticidad y viscoelasticidad. Prácticamente todos estos modelos han sido aplicados únicamente para materiales ortotrópicos como los polímeros reforzados por fibras paralelas (llamados compósitos unidireccionales). En esta tesis se utilizan modelos de plasticidad acoplado con daño per aplicados a multicapas hechos de capas ortotrópicas como el que se muestra en la figura 1.1 (el material multicapa puede ser altamente anisotrópico y no ortotrópico pues depende de la orientación de las fibras de cada capa). En este capítulo utilizaremos el modelo de plasticidad acoplado con daño de Allix et. al [18] y lo introduciremos a la teoría clásica de placas laminadas (TC-PL). La TCPL fue originalmente desarrollada para multicapas elásticos pero en este trabajo

extenderemos su aplicación para tomar en cuenta los fenómenos inelásticos de interés.

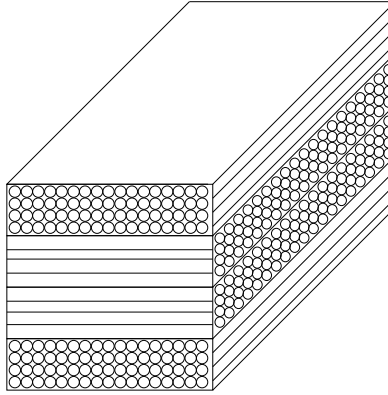


Figura 1.1: Multicapas simétrico $(0, 90)_s$

Este capítulo comienza con una breve descripción del comportamiento de los compósitos unidireccionales modelado por Allix et. al [18] y con un resumen de las ecuaciones de la TCPL. Después, se introduce el modelo de Allix et. al en la TCPL y se muestran las ecuaciones desarrolladas para un multicapa en tensión. Luego, se describe el algoritmo utilizado y su implementación en un programa computacional para resolver las ecuaciones no lineales y después se muestran las aplicaciones del programa y su validación. Finalmente, una conclusión de este capítulo es presentada donde se recapitulan los principales resultados de este capítulo.

1.2. Generalidades de compósitos unidireccionales y su comportamiento

1.2.1. Notación ingenieril

El esfuerzo y la deformación son tensores de segundo rango que normalmente se escriben:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Sin embargo a veces es más cómodo utilizar la definición de los vectores de esfuerzos y deformaciones.

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

En el vector de deformaciones las componentes de corte aparecen con un coeficiente igual a dos, esto es con el fin de expresar fácilmente la densidad energía.

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \hat{\sigma}\hat{\varepsilon}' \quad (1.3)$$

El comportamiento lineal elástico se escribe normalmente (para un material isotrópico o anisotrópico) como

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (1.4)$$

donde σ_{ij} son los esfuerzos, A_{ijkl} el tensor de rigideces, ε_{ij} las deformaciones, S_{ijkl} el tensor de complianzas. Con la notación ingenieril la matriz de complianzas, que en su desarrollo tensorial nos daría 81 elementos, queda en una matriz de 6x6:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 2S_{14} & 2S_{15} & 2S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 2S_{24} & 2S_{25} & 2S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 2S_{34} & 2S_{35} & 2S_{36} \\ 2S_{41} & 2S_{42} & 2S_{43} & 4S_{44} & 4S_{45} & 4S_{46} \\ 2S_{51} & 2S_{52} & 2S_{53} & 4S_{54} & 4S_{55} & 4S_{56} \\ 2S_{61} & 2S_{62} & 2S_{63} & 4S_{64} & 4S_{65} & 4S_{66} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

donde la correspondencia de los subíndices es la siguiente:

notación tensorial	11	22	33	23,32	31,13	12,21
notación matricial	1	2	3	4	5	6

La matriz de rigideces tiene el mismo número de elementos y se escribe:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

1.2.2. Comportamiento elástico de compósitos unidireccionales

Una lámina unidireccional es una capa plana o curva de fibras orientadas en una sola dirección envueltas por una matriz cuya función es mantenerlas unidas y permitir la transmisión del esfuerzo al que esté sometida la capa. Los esfuerzos normales a la superficie de la capa son asumidos cero.

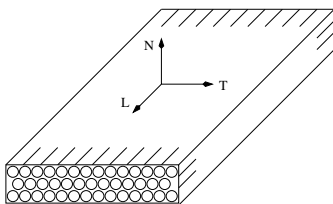


Figura 1.2: Capa unidireccional en el sistema de ejes locales

Mientras que el comportamiento elástico de materiales isotrópicos puede ser descrito con dos constantes, un compósito unidireccional es caracterizado por cuatro constantes elásticas (rigideces). Las propiedades del material son definidas a lo largo de la fibra (dirección

L) y perpendicular a la fibra (dirección T) tal como lo muestra la figura 1.2. Por cada capa unidireccional las cuatro constantes elásticas son: el módulo longitudinal E_L , el módulo transversal E_T , el coeficiente de Poisson ν_{LT} y el módulo de corte G_{LT} . Solamente un coeficiente de Poisson es necesario ya que $\nu_{TL} = \nu_{LT}(\frac{E_T}{E_L})$.

Para un compósito el comportamiento lineal elástico de la ecuación 1.4 se escribe para el estado de esfuerzos planos (los esfuerzos σ_{NN} , σ_{LN} y σ_{TN} valen cero) en coordenadas locales:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ 2\varepsilon_{LT} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_L & S_{LT} & 0 \\ S_{LT} & S_T & 0 \\ 0 & 0 & S_{corte} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Definiendo la matriz de rigideces de esfuerzos planos $[A] = [S]^{-1}$ se obtiene otra forma de la ecuación anterior:

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_L & A_{LT} & 0 \\ A_{LT} & A_T & 0 \\ 0 & 0 & A_{corte} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ 2\varepsilon_{LT} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Es importante subrayar que las ecuaciones de comportamiento lineales (1.7) y (1.8) están escritas en el sistema de ejes del material (también llamado sistema de ejes local). Cuando se elaboran materiales multicapa (apilado de capas) con capas con diferentes orientaciones es necesario escribir estas ecuaciones en un sistema de ejes de referencia (el mismo para todas las capas, llamado sistema de ejes global). Consideremos el sistema de ejes global de la figura 1.3 donde las fibras de la capa hacen un ángulo θ con respecto al eje x del sistema global; es decir que el eje L del sistema de ejes local ligado al material hace un ángulo $theta$ con respecto al eje de las x .

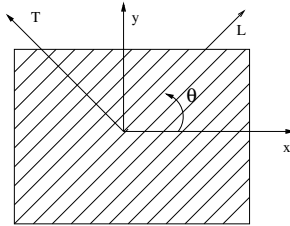


Figura 1.3: Definición de los sistemas globales y locales

En el sistema de ejes global, las ecuaciones 1.7 y 1.8 se escriben respectivamente:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

y

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \tilde{Q} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

donde \tilde{C} y \tilde{Q} son las matrices de rigideces y de complianzas en el plano (x, y) en el sistema global. Sus coeficientes se deducen de sus homólogos en el sistema local gracias a simples operaciones matriciales de rotación. Por ejemplo, para la matriz de rigideces se obtiene:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{16} \\ Q_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ mn^3 & -mn^3 & mn^3 - m^3n & 2(mn^3 - m^3n) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n - mn^3 & 2(m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_L \\ A_T \\ A_{LT} \\ A_{corte} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

donde $m = \cos(\theta)$, $n = \sin(\theta)$. Cabe recalcar que cuando $\theta = 0$, entonces $Q_{16} = Q_{26} = 0$, lo cual significa que los esfuerzos de corte y los de tensión están desacoplados; es decir que las cargas de corte solamente causarán deformaciones de corte y las de tensión solo provocarán deformaciones de tensión con efectos de Poisson, pero no deformaciones de corte.

Estas ecuaciones de comportamiento son alteradas en el momento en que aparecen microgrietas (daño) o plasticidad como veremos en los párrafos siguientes.

1.2.3. Comportamiento con daño de compósitos unidireccionales

El daño nos representa la densidad de volumen de las microgrietas que se forman en un cuerpo sometido a un estado esfuerzo (ver fig. 1.4), es importante el poder describir su inicio y evolución.

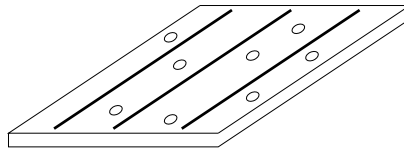


Figura 1.4: Representación de daño en una capa de fibras unidireccionales.

El daño en capas con fibras unidireccionales se presenta sobre todo en la matriz y en las interfaces entre la fibra y la matriz, ya que la interfase y la matriz son más frágiles que las fibras [18]. Las causas que inician y provocan la evolución del daño son complejas y difícilmente se puede modelar a un nivel de micromecánica (diferenciando la fibra y la matriz) que nos diga cualitativamente el comportamiento observado. La mayoría de los autores prefieren homogenizar el material y basarse en principios energéticos, como en la mecánica de la fractura donde se considera una grieta y a través de la energía disipada se puede estudiar la evolución de la misma.

En este trabajo, se utilizó el modelo desarrollado y validado por Allix et al. [18] para modelar el daño. Este modelo parte de las siguientes premisas:

- Las microgrietas afectan directamente la rigidez del material.
- Una vez que se presenta daño se queda en la "memoria" del material.
- El daño es un fenómeno irreversible, el cual solamente aumenta con la aplicación de las cargas.
- A una escala microscópica el daño es uniforme y puede ser homogenizado y modelado por campos escalares d_T y d_{LT} llamados parámetros de daño. Estos parámetros representan la densidad de microgrietas en la zona considerada. d_T es causado por esfuerzos de tensión en la dirección transversal y d_{LT} por cortante σ_{LT} . Cuando $d_{LT} = 1$ ($d_T = 1$) el material pierde su rigidez al corte LT (a la tensión transversal). Inversamente, si $d_{LT} = 0$ ($d_T = 0$) el material tiene una rigidez al corte (a la tensión transversal) igual a la original cuando el material era virgen.
- El material no necesariamente debe llegar al porcentaje de daño máximo, puede fallar antes debido a otras restricciones.
- En la dirección de las fibras el daño es despreciable.
- El daño influye en los esfuerzos ya que al aumentar disminuye el área efectiva.

En la matriz micro-agrietada hay una reducción del área efectiva, por lo tanto afectará a los esfuerzos que se desarrollan en el material de un punto de vista microscópico (ver figura 1.5).

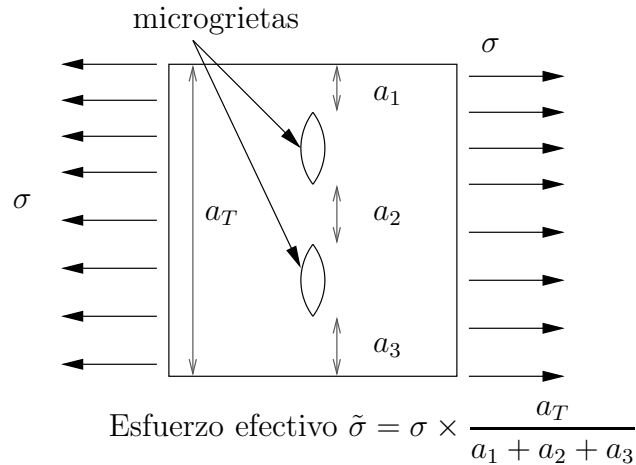


Figura 1.5: Ejemplo de cálculo del esfuerzo efectivo.

Los esfuerzos que se desarrollan microscópicamente en el material son los esfuerzos efectivos siguientes:

$$\tilde{\sigma}_{LT} = \frac{\sigma_{LT}}{(1 - d_{LT})}; \tilde{\sigma}_{TT} = \frac{\langle \sigma_{TT} \rangle_+}{(1 - d_{TT})} + \langle \sigma_{TT} \rangle_-; \tilde{\sigma}_{LL} = \sigma_{LL} \quad (1.12)$$

donde d_{TT}, d_{LT} representan la densidad de microgrietas y σ_{LT} y σ_{TT} son los esfuerzos aparentes. La función $\langle \sigma_{TT} \rangle_+$ representa la parte positiva del escalar σ_{TT} . De la misma manera $\langle \sigma_{TT} \rangle_-$ representa la parte negativa del escalar σ_{TT} . Se consideran estas dos funciones porque un material agrietado en compresión soporta el mismo esfuerzo que un material no dañado (las grietas se cierran). Para un material ortotrópico elástico con daño, el comportamiento elástico de la ecuación (1.7) se escribe en el sistema de ejes de ortotropía y en esfuerzos planos de la siguiente manera [18]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ 2\varepsilon_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T(1-d_T)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}(1-d_{LT})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Las cargas termodinámicas asociadas a las variables internas d_{LT} y d_{TT} son respectivamente:

$$\begin{aligned} Y_{d_{LT}} &= \left. \frac{\partial [E_D]}{\partial d_{LT}} \right|_{\sigma=cst} = \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{LT}^2]}{G_{LT}(1 - d_{LT})^2} \\ Y_{d_{TT}} &= \left. \frac{\partial [E_D]}{\partial d_{TT}} \right|_{\sigma=cst} = \frac{1}{2} \frac{[\langle \sigma_{TT} \rangle_+^2]}{E_T(1 - d_{TT})^2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde $Y_{d_{LT}}$ y $Y_{d_{TT}}$ representan la densidad de energía de fractura. Estas densidades de energía permiten estudiar la forma en que progresa el daño (recordemos que el daño es irreversible de tal manera que los parámetros de daño solo pueden crecer). Por otro lado, un daño transversal d_T en el material puede influir para que el material disminuya su rigidez al corte. Por lo tanto hay que considerar un posible acoplamiento entre los dos tipos de daño. Tomando en cuenta este acoplamiento, se define la densidad de energía total:

$$\underline{Y}_d = (Y_{d_{LT}} + bY_{d_{TT}}) \quad (1.15)$$

donde b es un escalar adimensional (propiedad del material) que presenta el acoplamiento. Esta energía de fractura total permite evaluar el crecimiento de daño (para valores moderados) a través de las ecuaciones:

$$d_{LT} = \sup \Big|_{\tau \leq t} \left(\frac{\sqrt{\underline{Y}_{d_{LT}}} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c}}; 0 \right) \quad (1.16)$$

y

$$d_{TT} = b d_{LT} \quad (1.17)$$

donde $\sup \Big|_{\tau \leq t} (x, y)$ es el máximo en la historia de x y y . Esta función \sup permite modelar la irreversibilidad del daño. Las ecuaciones (1.16) y (1.17) están incompletas pues hay que restringir el crecimiento de los parámetros de daño a un máximo de 1 (un daño mayor que 1 no tiene sentido). Además, en muchas ocasiones, el material puede fallar ($d_{LT} = 1$

ó $d_T = 1$) bruscamente a partir de un valor inferior a uno sin tomar valores intermedios. Allix et al. [18] definieron entonces las energías de fractura críticas para el corte y para la tensión transversal Y_{SC} y Y_{ST} (constantes propiedades del material), respectivamente. De esta manera la densidad de energía de fractura Y_{dT} alcanza en algún momento el valor Y_{ST} entonces el parámetro de daño vale $d_T = 1$. También, estos autores hicieron un razonamiento análogo para Y_{SC} , Y_{dLT} y d_{LT} . Estos criterios fueron resumidos por los mismos autores en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
d_{LT} &= \sup_{\tau \leq t} \left(\frac{\sqrt{Y_{dLT}} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c}}; 0 \right) \\
&\quad \text{si } \sup_{\tau \leq t} \left(\frac{Y_{dLT}}{Y_{SC}}; d_{LT} \right) < 1 \text{ de otro modo } d_{LT} = 1 \\
d_{TT} &= b d_{LT} \text{ si } d_{TT} < 1 \text{ y } \sup_{\tau \leq t} \left(\frac{Y_{dTT}}{Y_{ST}}; d_{TT} \right) < 1 \\
&\quad \text{de otra manera } d_{TT} = 1
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Estas ecuaciones quedan completas y listas para usarse y modelar el daño y su crecimiento.

Aparte del daño, un mecanismo no lineal que también ocurre en los compósitos es la plasticidad.

1.2.4. Plasticidad

El adjetivo "plástico" proviene del verbo griego $\pi\lambda\alpha\sigma\sigma\epsilon\iota\nu$ que significa "formar"; es decir, existen materiales que tienen la propiedad de cambiar su forma al aplicarle una fuerza de magnitud y dirección apropiada, manteniendo o reteniendo su nueva forma después de retirar la fuerza aplicada. La plasticidad es un proceso disipativo que por lo general se describe a través del concepto de variable interna (ξ), la cual nos representa ese algo necesario para determinar la deformación en cualquier punto del cuerpo.

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T, \xi) \tag{1.19}$$

Un ejemplo de variable interna sería la acumulación de plasticidad que ha sufrido el material a través de su historia. Ya que se introducen variables extras, se necesitan ecuaciones constitutivas adicionales como las ecuaciones de evolución

$$\dot{\xi} = g_\alpha(\sigma, T, \xi). \tag{1.20}$$

De ahora en adelante trabajaremos con una temperatura fija, por lo cual T no aparecerá mas en las ecuaciones.

Un material con plasticidad sigue presentando deformaciones elásticas. La deformación total que uno visualiza es la suma de la deformación plástica y la deformación elástica: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$. Para determinar cuando un material ha dejado la zona elástica y ha entrado a la zona plástica, se asume la existencia de una función criterio $f(\sigma, \xi)$ que describe una hipersuperficie, por lo general planteada en el espacio de esfuerzos solamente, tal que si $f \geq 0$

se está en la zona plástica. Las ecuaciones de evolución de la deformación plástica quedan determinadas por la ley “de flujo normal” con la cual el incremento de las deformaciones es perpendicular a la hipersuperficie:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.21)$$

donde λ es un escalar.

En el modelo de Allix et. al [18] que utilizamos, además del daño se considera la plasticidad. En este modelo se asume que no existe flujo plástico en la dirección de las fibras. El dominio elástico queda definido por:

$$f(\tilde{\sigma}, R) = \sqrt{\tilde{\sigma}_{12}^2 + a^2 \tilde{\sigma}_{22}^2} - R(p) - R_0 \leq 0 \quad (1.22)$$

donde a es una constante del material, R_0 es la frontera inicial para que un estado de esfuerzos plastifique al compuesto (constante del material) y $R(p)$ es la función de endurecimiento definida por

$$R(p) = \beta p^\gamma. \quad (1.23)$$

En esta ecuación, p representa la deformación plástica acumulada (esta variable es la que guarda la memoria de la historia de deformación plástica) definida por:

$$p = \sum_{historia} \sqrt{\frac{2}{3} \left[(d\varepsilon_{TT}^p)^2 + 2 (d\varepsilon_{LT}^p)^2 \right]} \quad (1.24)$$

donde $d\varepsilon_{TT}^p$ y $d\varepsilon_{LT}^p$ son los incrementos de deformaciones plásticas en el sistema de ejes de ortotropía.

Es importante remarcar que en este modelo solo se toma en cuenta el endurecimiento plástico esquematizado en la figura 1.6. El radio vector nos señala el límite de la zona elástica, cuando la combinación de las componentes de esfuerzos nos da un radio-vector mayor que la zona elástica, se originan las deformaciones plásticas y la zona elástica crece (línea punteada) debido al endurecimiento (evolución de $R(p)$).

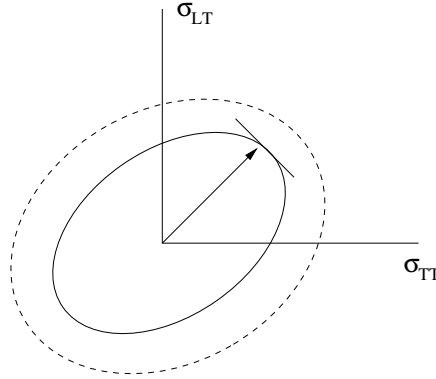


Figura 1.6: Comportamiento del endurecimiento plástico

Las leyes de flujo son escritas como sigue:

$$\dot{\varepsilon}_{LT}^p = \frac{1}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\sigma}_{LT}}{R(p) + R_0}; \dot{\varepsilon}_{TT}^p = a^2 \dot{p} \frac{\tilde{\sigma}_{TT}}{R(p) + R_0}; (\dot{p} \geq 0). \quad (1.25)$$

1.2.5. Teoría clásica de placas laminadas

El apilamiento de las capas unidireccionales es lo que forma al material compuesto multicapa y le da sus características mecánicas. Ya que las posibles configuraciones de apilamiento de las capas son infinitas se necesita de alguna manera el poder calcular las propiedades y comportamientos que tendrá el laminado, conociendo los datos de la capa unidireccional. Esta teoría que nos permite el diseñar laminados es conocida como la Teoría clásica de placas laminadas (TCPL) y es ampliamente utilizada para materiales elásticos. Los compósitos laminados son estructuras donde dos de sus dimensiones son mucho mayores que la otra (el espesor), pudiéndose tomar como bidimensional. La TCPL trata sobre el comportamiento en tensión y flexión relativo al plano medio de la placa (ver figura 1.7). La suposición fundamental de la TCPL es que una sección perpendicular al plano medio permanece perpendicular al mismo plano durante la deformación. Las capas en el multicapa son idealizadas como perfectamente unidas entre sí y se asume un comportamiento lineal elástico.

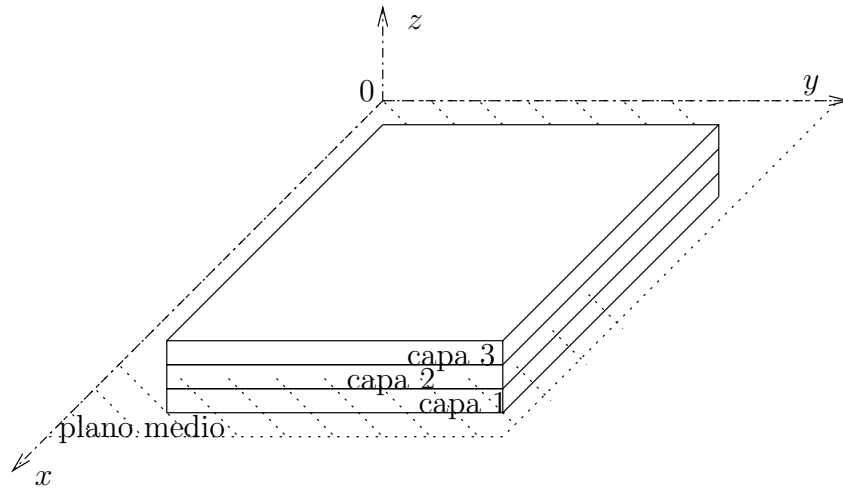


Figura 1.7: Ejemplo de multicapa y convención adoptada para los ejes.

Los desplazamientos fuera del plano son anotados $u_z(x, y)$ (véase la figura 1.7 para ver cómo están definidos los ejes x , y y z). Basados en la premisas anteriormente descritas se muestra en la figura 1.8 la deformación de una sección transversal de la placa en el plano $x - z$.

La ecuación que describe el desplazamiento en la dirección x es:

$$u_x(x, y, z) = u_x^0(x, y) - z \frac{\partial u_z}{\partial x}(x, y) \quad (1.26)$$

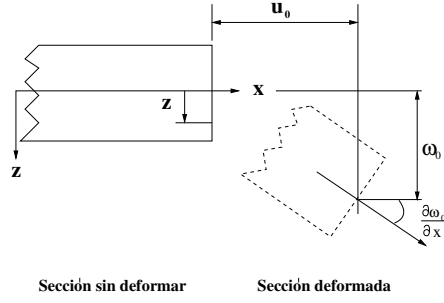


Figura 1.8: deformaciones de tensión y flexión

donde z es la distancia al plano medio. Similarmente el desplazamiento en la dirección de las y es:

$$u_y(x, y, z) = u_y^0(x, y) - z \frac{\partial u_z}{\partial y}(x, y) \quad (1.27)$$

Basados en la definición de deformaciones, las deformaciones en el plano (x, y) son

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_x^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_y^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ \varepsilon_6 &= \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \frac{\partial u_x^0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.28)$$

La deformación mecánica total es escrita como una función de los componentes de deformación en el plano medio y de flexión:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 + z\kappa_1 \\ \varepsilon_2^0 + z\kappa_2 \\ \varepsilon_6^0 + z\kappa_6 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

donde ε^0 es la deformación del plano medio, z es la distancia al plano medio y κ es la curvatura de la lámina.

En la TCPL se definen esfuerzos y momentos generalizados para eliminar cualquier dependencia con z y para relacionarlo todo con el plano medio. Los esfuerzos y momentos generalizados están esquematizados en la figura 1.9 y se deducen de los esfuerzos tridimensionales por medio de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{bmatrix} &= \int_{placa} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} dz \\ \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} &= \int_{placa} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} z dz \end{aligned} \quad (1.30)$$

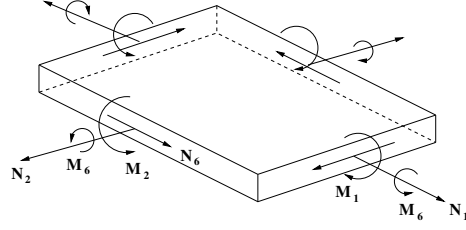


Figura 1.9: Esfuerzos generalizados

Estos esfuerzos generalizados se relacionan con las deformaciones por medio del comportamiento lineal elástico:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= [\mathbf{A}]\vec{\varepsilon}^0 + [\mathbf{B}]\vec{\kappa} \\ \vec{M} &= [\mathbf{B}]\vec{\varepsilon}^0 + [\mathbf{D}]\vec{\kappa}\end{aligned}\quad (1.31)$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_6 \end{bmatrix}\quad (1.32)$$

donde

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}] &= \sum_{\text{capas}} \int_{\text{capa } i} [\mathbf{Q}^i] dz \\ [\mathbf{B}] &= \sum_{\text{capas}} \int_{\text{capa } i} [\mathbf{Q}^i] z dz \\ [\mathbf{D}] &= \sum_{\text{capas}} \int_{\text{capa } i} [\mathbf{Q}^i] z^2 dz\end{aligned}\quad (1.33)$$

donde $[\mathbf{Q}^i]$ es la matriz de rigideces de la capa i expresada en el sistema de ejes global (x, y, z) y no en el local de la capa.

Un material multicapa con capas de compuesto unidireccional con diferentes orientaciones (generalmente un material anisotrópico) bajo una carga en el plano puede estirarse, flexionarse o torcerse, como resultado de un acoplamiento tensión-flexión. La orden de apilado de las capas no tiene efecto en la matriz A, la cual refleja el comportamiento del plano medio. Sin embargo dado que la matriz de coeficientes de B y D son funciones de z ellos dependen de la secuencia de apilamiento. Hay dos situaciones físicas que es importante analizar. Cuando el multicapa es simétrico los coeficientes B serán cero lo cual significa que no hay acoplamiento flexión-tensión. La segunda situación es cuando los coeficientes A_{16} y A_{26} son cero, esto nos indica que el multicapa esta balanceado, por ejemplo si hay un igual número de capas $+\theta$ y $-\theta$ teniendo un espesor homogéneo en las capas. En este caso no hay acoplamiento entre cargas de extensión y deformaciones de corte.

1.3. Multicapa Inelástico en tensión

Partimos del modelo para el caso de multicapas en tensión formado de capas con fibras unidireccionales (ver figura 1.10). La simulación contendrá solamente ensayos de tensión con multicapas simétricos ya que nos hace nulas las matrices B y D, además como no hay flexión el vector de momento M será igual a cero.

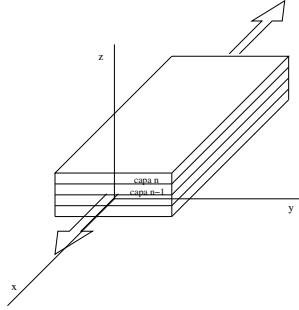


Figura 1.10: Multicapas sometidos a tensión

El daño será modelado a través de las ecuaciones 1.14, 1.15, 1.18, donde los parámetros de daño d_{LT} , d_{TT} afectarán la matriz de complianzas 1.13. Para el comportamiento plástico se utilizan las ecuaciones 1.22, 1.25 donde el acoplamiento de los dos fenómenos inelásticos se realiza por los esfuerzos efectivos 1.12. Es importante remarcar que cada una de las ecuaciones de daño y plasticidad son aplicadas capa a capa.

Se utiliza la teoría clásica de placas reducida a la parte de los esfuerzos generalizados N y su complianza A, se le incorpora la deformación plástica utilizando la ecuación (1.34).

$$\sum_{i=1}^n e^i \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^i \\ \sigma_{yy}^i \\ \sigma_{xy}^i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n e^i \left[\tilde{S}_i(di) \right]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx}^{i,p} \\ \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}^{i,p} \\ 2\varepsilon_{xy} + 2\varepsilon_{xy}^{i,p} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

donde el vector $[\varepsilon_{xx}^{i,p}, \varepsilon_{yy}^{i,p}, \varepsilon_{xy}^{i,p}]$ nos representa las deformaciones plásticas por capa y S^i es la matriz de complianzas de la capa i , en el sistema de ejes globales. Es importante recalcar que una consecuencia de haber utilizado la teoría clásica de placas es que la deformación global es igual para todas las capas. Las deformaciones que si pueden ser diferentes son las elásticas y plásticas.

El comportamiento para una carga de tensión en la dirección de las x se escribe en esfuerzos generalizados como:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n e^i \left[\tilde{S}_i(di) \right]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} + \tilde{H} \quad (1.35)$$

donde \tilde{H} nos representa los esfuerzos residuales aparentes en la placa debidos a la plasticidad, N_{xx} es la fuerza lineal aparente en la dirección de las x (la sumatoria de los esfuerzos σ_{xx} de todas las capas). Las deformaciones plásticas aparentes son una especie de promedio

de las deformaciones plásticas de las capas (pueden haber capas que plastifiquen y otras que no, pero aparentemente el multicapa sí plastifica). La fórmula desarrollada de \tilde{H} es:

$$\tilde{H} = \sum_{i=1}^n e^i \left[\tilde{S}_i(di) \right]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{i,p} \\ \varepsilon_{yy}^{i,p} \\ 2\varepsilon_{xy}^{i,p} \end{bmatrix} = \tilde{A}(d) \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^p \\ \varepsilon_{yy}^p \\ 2\varepsilon_{xy}^p \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

donde ε_{xx}^p ε_{yy}^p ε_{xy}^p son las deformaciones plásticas aparentes y $\varepsilon_{xx}^{i,p}$ $\varepsilon_{yy}^{i,p}$ $\varepsilon_{xy}^{i,p}$ son las deformaciones plásticas por capa. La siguiente ecuación nos permite el cálculo de las deformaciones plásticas aparentes, las cuales se pueden visualizar como las deformaciones plásticas resultantes del multicapa que se pueden medir en los ensayos de tensión.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^p \\ \varepsilon_{yy}^p \\ 2\varepsilon_{xy}^p \end{bmatrix} = \tilde{A}^{-1}(d) \left(\sum_{i=1}^n e^i \left[\tilde{S}_i(di) \right]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{i,p} \\ \varepsilon_{yy}^{i,p} \\ 2\varepsilon_{xy}^{i,p} \end{bmatrix} \right) \quad (1.37)$$

Hasta el momento los vectores de esfuerzo y deformaciones han sido manipulados en las coordenadas globales del multicapa, estos se deberán transformar a coordenadas locales para utilizar las ecuaciones de daño y plasticidad. La transformación de los esfuerzos es la siguiente

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}^2\theta & 2\text{sen}\theta\cos\theta \\ \text{sen}^2\theta & \cos^2\theta & -2\text{sen}\theta\cos\theta \\ -\text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

y la transformación de las deformaciones es

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL}^p \\ \varepsilon_{TT}^p \\ \varepsilon_{LT}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta \\ \text{sen}^2\theta & \cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta \\ -2\text{sen}\theta\cos\theta & 2\text{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^p \\ \varepsilon_{yy}^p \\ \varepsilon_{xy}^p \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Implementación numérica

Para realizar los cálculos se parte de la suposición que la deformación total del multicapa es la misma para todas las capas. El algoritmo numérico es de tipo punto fijo, se empieza con una deformación global conocida (ε_{xx}), se suponen los distintos vectores iniciales de deformación plástica generalizada y de capa, además de suponer cero a los parámetros de daño. Utilizando la ecuación 1.34 para obtener los esfuerzos por capa en coordenadas globales, mismos que se transforman a locales con la ecuación 1.38. Los esfuerzos ya transformados se inyectan en las formulas de daño 1.14, 1.15, 1.18 para obtener los parámetros que afectarán a la matriz de complianzas 1.13, además de los esfuerzos 1.12. Estos esfuerzos son usados en la función criterio 1.22 la cual nos indica si hemos entrado a la región plástica. Una vez que se confirma, calculamos los incrementos de deformaciones plásticas, los cuales a su vez son inyectados de nuevo a la 1.34 para obtener las nuevas variables que se compararán con las ya obtenidas de la iteración anterior, deteniendo el ciclo hasta que la convergencia resulte satisfactoria para todos los vectores de plasticidad y de daño por capa y del multicapa. La lógica del algoritmo se puede visualizar en la figura 1.11 de la siguiente manera

La figura 1.11 nos muestra como se supone un comportamiento elástico que nos produce, un esfuerzo inicial, el cual se va ajustando gracias a las deformaciones plásticas y a la

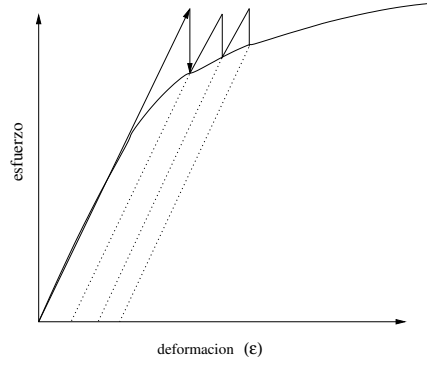


Figura 1.11: Método de solución elástica

modificación de la matriz de complianzas que arroja la simulación. Cabe mencionar que en el desarrollo del algoritmo se observó la necesidad de cambiar las suposiciones de deformación plástica por una que siguiera la curva de deformaciones plásticas anteriores, pudiendo realizar una extrapolación de los datos para una mejor y más rápida convergencia, además se tuvo que hacer variable el incremento de deformación ya que a una mayor plasticidad acumulada el algoritmo se hacía más sensible al paso.

El diagrama de flujo de la figura de la figura (1.12) nos muestra la lógica del algoritmo creado. Los módulos de plasticidad y daño a su vez realizan iteraciones con parámetros fijos y calculan las nuevas deformaciones plásticas y parámetros de daño, que a su vez se vuelven a recalcular para hacer consistentes los resultados. Los diagramas siguientes muestran de una manera más detallada los módulos.

1.4. Resultados

Se verifica la simulación utilizando los resultados analíticos de un unidireccional con plasticidad ya conocido y validado por Khoa Van [22]. Cabe recalcar que una solución analítica queda limitada para soluciones de unidireccionales solamente. No se puede analizar con la solución analítica multicapa de tipo (45 – 45 – 45 – 45), por ejemplo (45 – 45 son los ángulos que hacen las fibras de cada capa con el eje de las x).

Se utilizaron los datos de la tabla 3.1 medidos por Khoa Van [22] para un compuesto de matriz epóxica y fibras de carbono.

E_L	125.75e9 [GPa]	G_{LT}	4.77e9 [GPa]
E_T	9.1e9 [GPa]	R_0	11.2e6 [MPa]
ν	0.34	a	0.168
K	370e6	m	2.5

Cuadro 1.1: Propiedades del carbono-epoxy

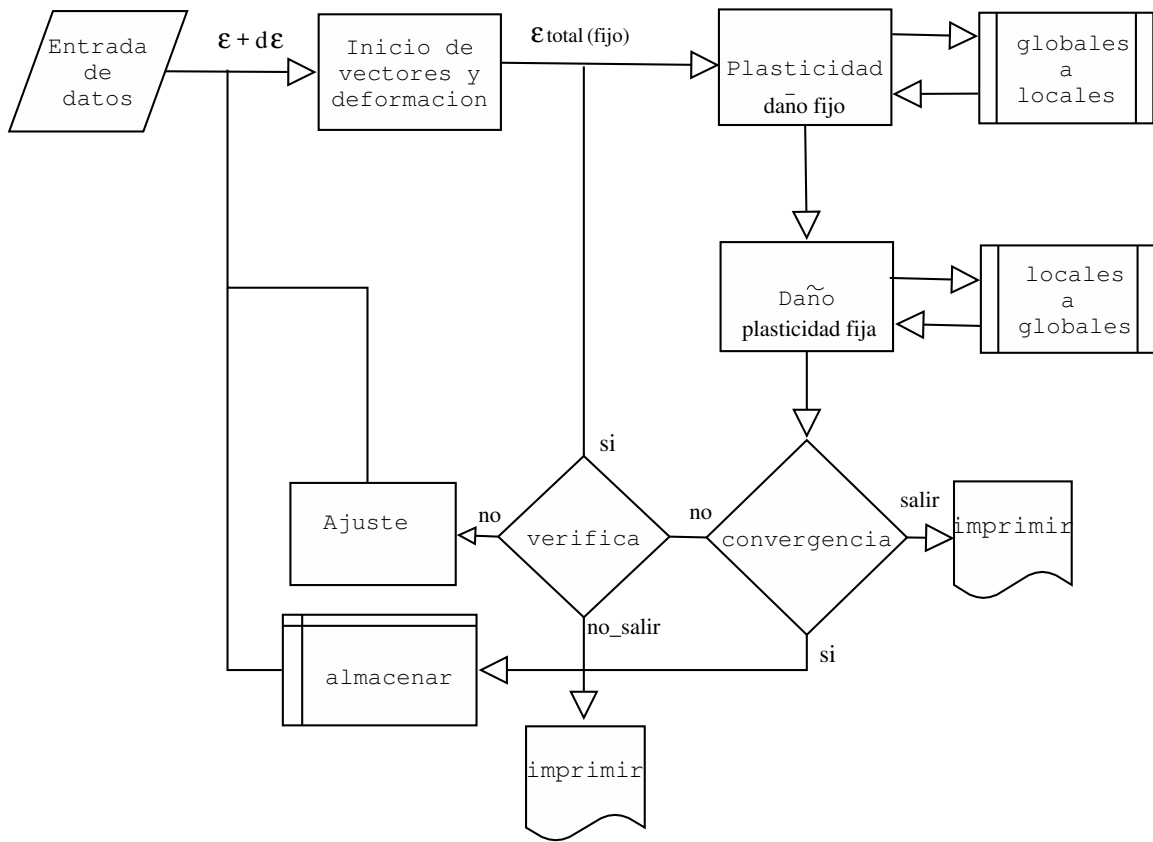


Figura 1.12: Diagrama de flujo del algoritmo

Para un multicapa unidireccional a 30 grados su curva esfuerzo deformación es la fig (1.14).

En la gráfica (1.14) se observa como la simulación converge de una manera satisfactoria hacia la solución analítica, su error relativo es menor a 1×10^{-6} y este depende del valor de error que uno desee establecer. Claro esta que a un valor menor de error implica un mayor número de iteraciones, además cuando va evolucionando la plasticidad la convergencia se vuelve más lenta. En la figura 1.15 se valida para un unidireccional a 60 grados. Se vuelve a corroborar que la simulación esta convergiendo adecuadamente.

Los resultados del modelo analítico con respecto a los ensayos mecánicos es bastante cercana como muestra las gráficas 1.16 reportadas por Khoa Van [22].

Ya que se observó que el modelo representaba satisfactoriamente los ensayos se prosiguió por utilizar los demás parámetros del modelo.

Veamos ahora la diferencia en el comportamiento de un 45 grados unidireccional y una multicapa $[\pm 45]_s$ grados con el fin de mostrar la importancia de los ángulos cruzados. En la gráfica 1.17 se notan las diferencias que se pueden observar cuando a un $[45 - 45]_s$ es sometido a un ensayo de tensión con respecto a un laminado unidireccional de 45.

Se observa la diferencia de rigidez entre ambos materiales, teniendo la mayor rigidez el multicapa $[45 - 45]_s$. Es importante subrayar como los sentidos de las fibras pueden cambiar

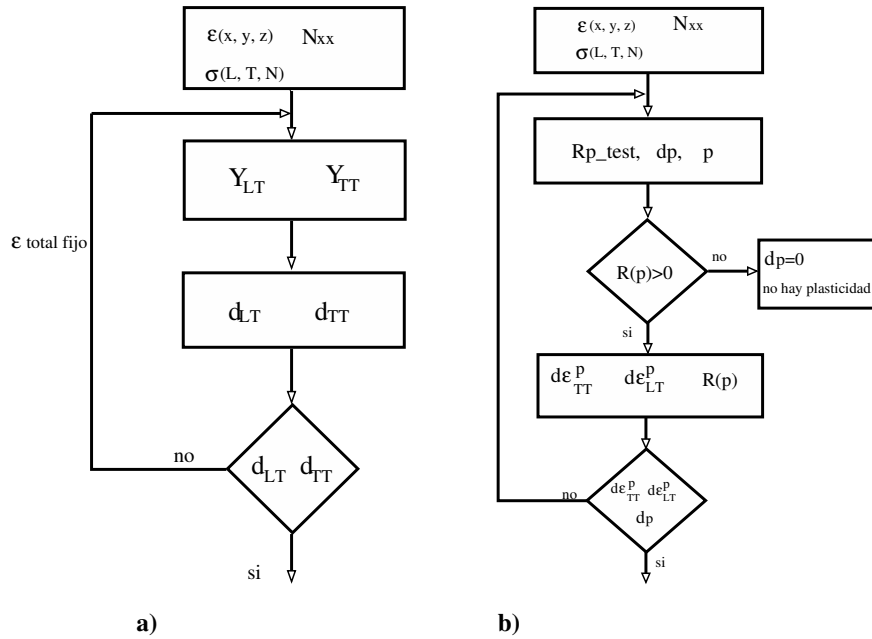


Figura 1.13: Módulos de plasticidad y daño

el comportamiento del laminado.

Un cálculo interesante es el de un $[45, 30]_s$ con diferente tipo de comportamiento en el modelo. En la gráfica 1.18 para el caso de un comportamiento lineal elástico, de otro plástico, de otro con daño y de otro con plasticidad y daño juntos. El modelo lineal elástico queda limitado a una deformación menor al 0.2 ya que a una mayor deformación se aleja de una manera visible de los demás comportamientos. El comportamiento de plasticidad pura nos permite visualizar ya un comportamiento no lineal pero es incapaz de permitirnos predecir una ruptura del material. El comportamiento de daño nos muestra un comportamiento no lineal pero sin deformaciones plásticas grabadas, teniendo en cuenta solamente el cambio del módulo de Young de las capas y por consecuencia del aparente. El cuarto comportamiento es el acoplado donde podemos visualizar tanto el efecto causado por el daño como por las deformaciones plásticas de la historia del material.

Finalmente, veamos la influencia de las densidades de energía de fractura críticas $Y_{st}Y_{sc}$ en el daño y falla del material. En la figura 1.19 se sigue considerando el material (30, 45), pero con daño únicamente y se puede observar que si unas de las capas fallan abruptamente (la energía de fractura crítica se alcanzó) el multicapa no necesariamente fallará en su totalidad sino que podrá seguir resistiendo un poco más de carga hasta fallar totalmente (cuando fallen todas las capas).

1.5. Conclusiones

Recapitulando lo visto en este primer capítulo, se empezó por una revisión de unidireccionales la cual nos acercó a los conceptos de anisotropía y de las ventajas que tienen estos

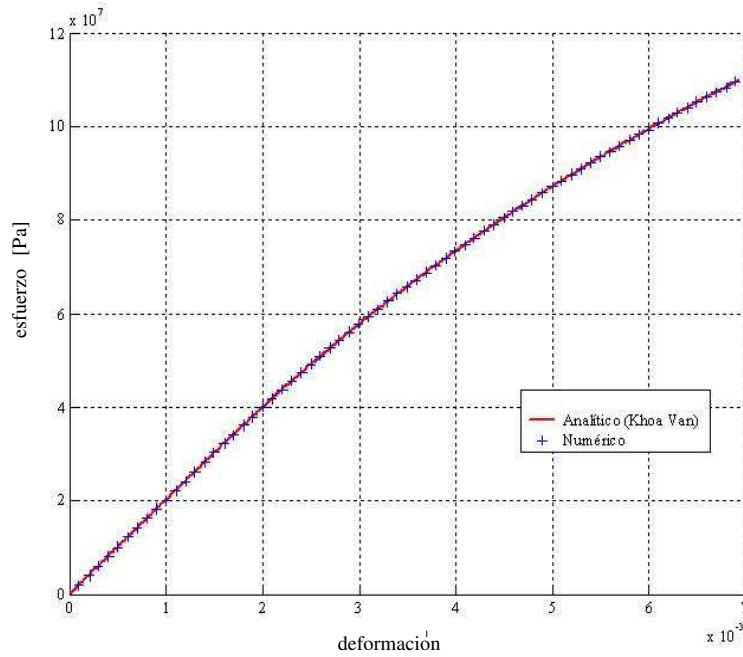


Figura 1.14: Curva esfuerzo deformación simulada de un multicapa de 30 grados vs el resultado analítico

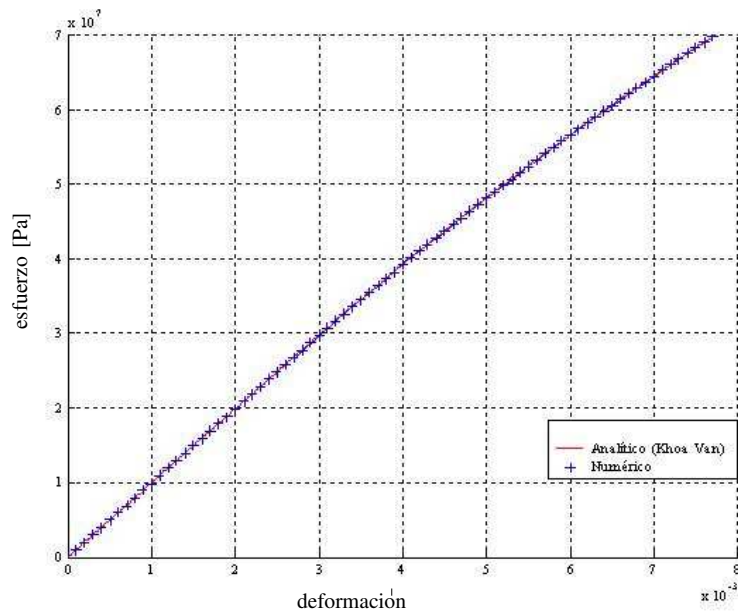


Figura 1.15: Curva esfuerzo deformación simulada de un multicapa de 60 grados vs al resultado analítico

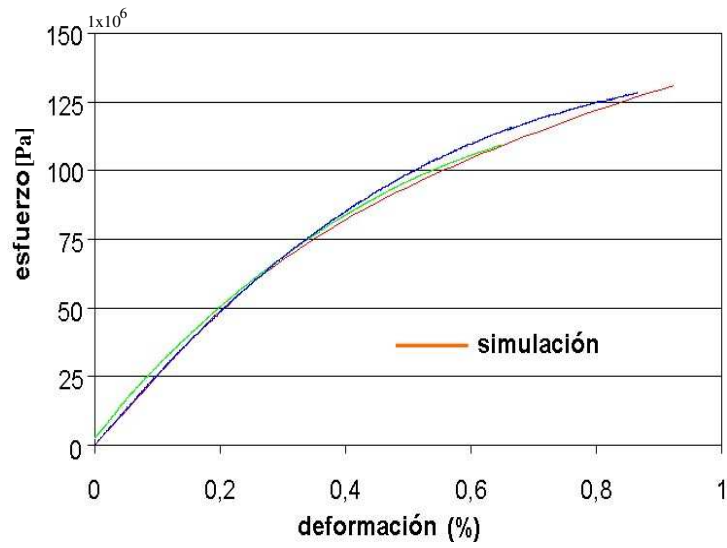


Figura 1.16: Curva esfuerzo deformación simulada de un multicapa de 30 grados vs experimento

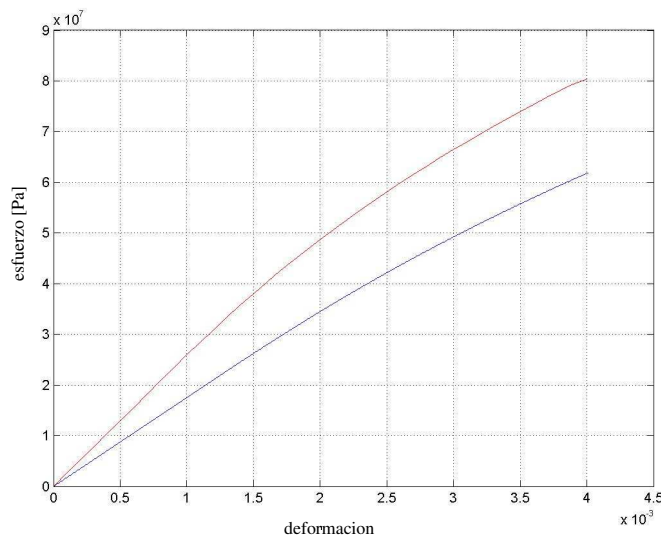


Figura 1.17: Curva esfuerzo deformación comparando un [45 -45] con un unidireccional a 45

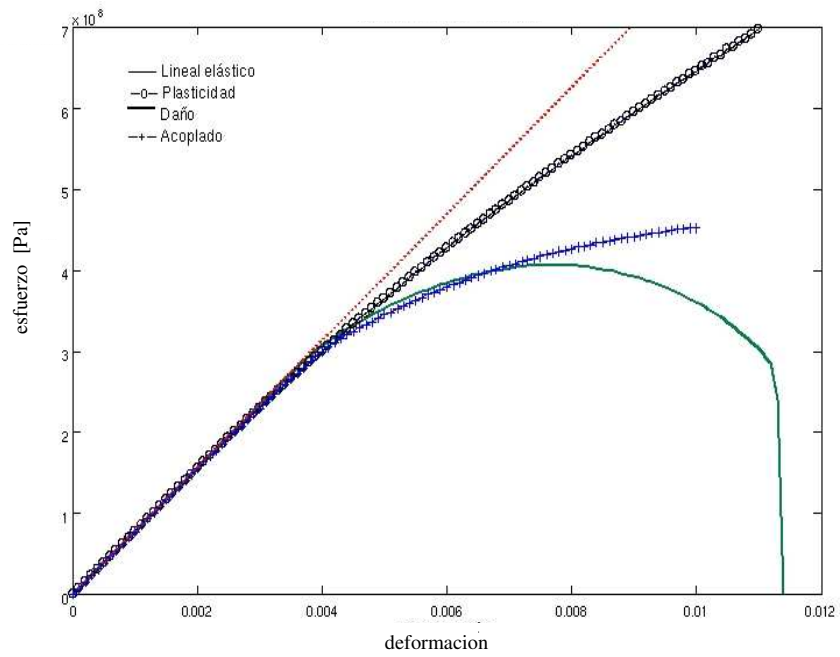


Figura 1.18: Curva esfuerzo deformación de un $(45, 30)_s$ con diferentes tipos de comportamiento.

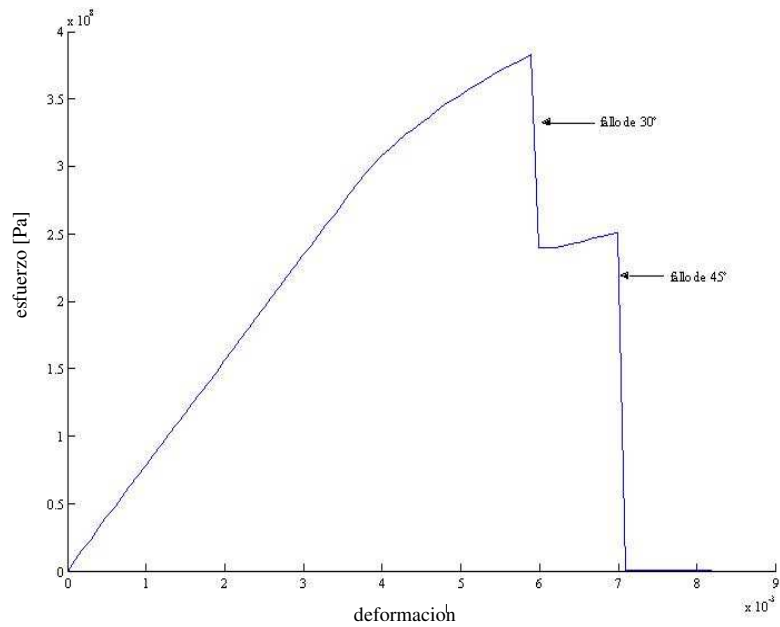


Figura 1.19: Curva esfuerzo deformación.

compuestos respecto a los tradicionales. Se mostró también cómo el daño nos permite modelar la evolución de las microgrietas; lo cual nos puede ayudar para poder predecir la falla de un material o para conocer cuando un material se fragiliza. Así mismo, vimos que la plasticidad nos indica que las deformaciones se quedan grabadas en la historia del material lo cual provoca fenómenos no lineales en el comportamiento del material. Todos estos fenómenos no lineales están descritos por el modelo de Allix et. al. [18]. Partiendo de las ecuaciones de este modelo se acoplaron las ecuaciones de comportamiento inelástico con la teoría clásica de placas para poder predecir el comportamiento no lineal de un laminado, observándose una gran diferencia de los diferentes comportamientos dependiendo del estado de esfuerzos y deformaciones al que estaba sometido el multicapa.

A pesar de que en el reporte de Allix venían algunos resultados de un multicapa, no se ha reportado código hasta el momento, por lo que un logro clave es el haber realizado un programa computacional que puede ser utilizado libremente y que permite simular cualquier multicapa con n capas teniendo solo la limitación de los recursos computacionales que se cuenten en el momento. Además se planea integrar a MACLAM el cual es un programa de ambiente amigable (desarrollado en el CIMAV por Díaz et. al. en [24]) que nos permite predecir el comportamiento global de los multicapas.

A pesar de obtener resultados e información satisfactoria con el modelo clásico de placas, este modelo presentado en este capítulo tiene la limitante de no poder predecir los efectos de borde que son los que provocan en la mayoría de las veces el inicio de delaminación (momento en que se despegan las capas) de un multicapa. En muchos casos, la delaminación provoca la falla de las estructuras multicapa. Puesto que la teoría clásica de placas no puede predecir la delaminación, el programa desarrollado en este capítulo arrojaría resistencias de multicapas con ángulos cruzados mayores a las resistencias experimentales Ladeveze et.al. [12]. Por eso se opta en el siguiente capítulo por tomar un modelo más complejo denominado M4-5n el cual nos permite calcular los esfuerzos de interfase así como los desplazamientos en las interfases de las capas. Este modelo fue desarrollado, en el ENPC, originalmente para multicapas elásticos. En el siguiente capítulo se integrará el modelo plástico de Allix en el M4-5n para así poder predecir la delaminación en multicapas inelásticos.

Capítulo 2

Adaptación de las ecuaciones de evolución y criterio plástico al modelo M4-5n

2.1. Introducción

Por las características tan especiales de los materiales multicapa, éstos pueden fallar de modos inusuales. Uno de los principales modos de falla es la delaminación (fractura de la interfase entre las capas). Mientras que los laminados son primordialmente diseñados para soportar cargas en el plano, esto no obsta para que se puedan desarrollar esfuerzos intensos en las regiones donde hay cambios abruptos de materia y/o de geometría, tal como sucede en los bordes. Los esfuerzos interlaminares (fuera del plano) en esta región son altamente localizados e intensos pudiendo ser un factor clave para la delaminación. Es conocido que la delaminación puede conducir a un severo debilitamiento de la estructura reduciendo su durabilidad ([25]-[27]). Por estas razones hay numerosos estudios teóricos y experimentales sobre los mecanismos de delaminación en compuestos laminados. Debido a que la delaminación es un fenómeno tan importante, se requiere el poder obtener y analizar los campos de esfuerzos y desplazamientos en las interfases y los bordes, pero por las simplificaciones que se realizan en la TCPL los resultados del campo de esfuerzos ya no son válidos en la zona cercana al borde. La clave para un apropiado análisis de la delaminación es entender la naturaleza de los esfuerzos interlaminares. Por eso, nos enfocaremos a hacer una revisión de los métodos que se han desarrollado para la evaluación de los esfuerzos.

Varias escalas pueden ser consideradas para el análisis del comportamiento del laminado: la micro-escala (fibras, matriz, interfase), la mesoescala (capa elemental) o la macro escala (compósito, estructura). En la mesoescala las propiedades de la capa se homogeneizan y el espesor de la capa se convierte en la unidad elemental para la estructura de un multicapa. Esta homogenización crea dos problemas: uno relacionado a la pérdida de detalles del material en la micro-escala, provocando que los campos solución envuelvan singularidades matemáticas. Es decir la pérdida de detalle hace difícil describir los mecanismos físicos que ocurren en la capa o en una interfase. T. Hayashi [28] presentó un modelo analítico para computar los esfuerzos interlaminares en laminados bajo una tensión axial. Cuando el laminado

es tensionado, las diferencias de las propiedades de la capa causan unos esfuerzos intensos de corte en la interfase. Los mayores esfuerzos calculados se presentaron en el borde decayendo rápidamente en cuanto se alejaban del mismo. Pipes y Pagano [30] desarrollaron un análisis tridimensional de los efectos de borde en laminados simétricos bajo una tensión axial. Las ecuaciones de cada capa son derivadas de una teoría elástica anisotrópica tridimensional donde esfuerzos exactos y condiciones de desplazamientos en la frontera son impuestos sobre la interfase y los bordes del laminado. Otros métodos analíticos subsecuentemente han sido desarrollados para aproximar las soluciones tridimensionales, por ejemplo Whitney y Sun [31] extendieron la teoría de placas a un orden mayor para tomar en cuenta los esfuerzos interlaminares, mientras que Tang y Levy [32] emplearon una teoría de capa límite. Pagano [33] después utilizó una teoría modificada de Whitney y Sun [31] en la cual le fue incorporado un principio variacional en la solución, más adelante hablaremos con más detalle de este modelo. Lecuyer [40], Lecuyer y Matherson [41] calcularon los esfuerzos interlaminares usando condiciones de frontera apropiadas y un método asintótico. También se han utilizado métodos de elemento finito, tridimensional con mallas extremadamente finas cerca de los bordes [39]. Una desventaja de las soluciones de elemento finito es que los resultados no convergen debido a que los esfuerzos de interfase son singulares. S. Wang [34], [35] investigó los campos de esfuerzos singulares en laminados con ángulos cruzados bajo tensión axial. Después S. Wang y Yuan [36] adoptaron un acercamiento híbrido [37] que combinan la solución de campos singulares con elementos finitos para soluciones lejos del borde. Bar-Yoseph y Ben-David [38] introducen un elemento de transición en conjunto con el acercamiento de elementos finitos híbridos.

Otros métodos utilizados son el uso de modelos de placa más finos que la TCPL. Entre estos métodos están los modelos multipartícula. En estos modelos, el laminado es modelado por una superposición de "placas modelo" (una para cada capa, la "placa" modelo es un objeto 2D) en la cual un punto geométrico es ocupado por N puntos materiales (uno por cada capa). Un ejemplo de estos modelos es el modelo M4-5n, el cual ya fue desarrollado [46] y validado [47] para multicapas elásticos. Por su construcción este modelo es apto para evaluar los efectos de borde y calcular los esfuerzos de interfase entre las capas. Sin embargo, como pudimos ver en el capítulo anterior, el comportamiento de las capas es a menudo plástico. Por este motivo en este capítulo se extenderá el desarrollo del modelo M4-5n para tomar en cuenta el comportamiento plástico de la capa, el cual se modelará por el modelo de Allix et. al. [18]. De esta manera obtendremos un modelo de placas multicapa plástico que toma en cuenta los efectos de borde sobre los esfuerzos de interfase: esto es la principal originalidad de este capítulo.

En este capítulo se iniciará con una breve reseña de los modelos multipartícula para después hacer una descripción del modelo M4-5n [46] Luego introduciremos el modelo de Allix et. al. [18] al M4-5n y presentaremos el desarrollo realizado para obtener las ecuaciones de evolución y criterio inelástico en esfuerzos generalizados para su integración al modelo.

2.2. Modelos multipartícula

Los modelos multipartícula hacen una aproximación más detallada de los campos en la dirección del espesor del multicapa que los modelos de placa de orden superior puesto que estos modelos multipartícula proponen una cinemática por capa en lugar de una cinemática global. Con este modelo se hace una reducción dimensional ya que el multicapa se representa por un conjunto de objetos bidimensionales acoplados por esfuerzos de interfase. El multicapa se vuelve así un objeto bidimensional en el cual cada punto geométrico es una superposición de partículas materiales que corresponden a las placas que modelizan cada capa. Se tiene entonces, el mismo número de partículas que de capas. (ver fig. 2.1).

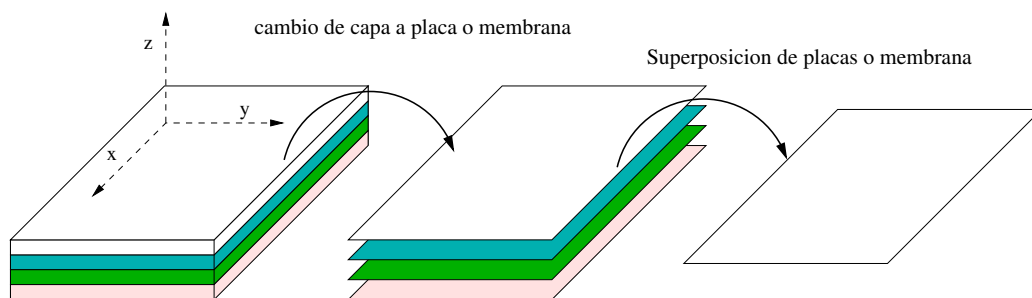


Figura 2.1: Acercamiento multipartícula de multicapas.

Unos de los primeros métodos simplificados al cual se le puede denominar multipartícula es el de Pupo y Evensen [42] para multicapas cargados en su plano. Los campos por capa son aproximados por campos promedio en cada capa. El modelo toma en cuenta esfuerzos de corte de interfase ligados en el comportamiento a las diferencias del desplazamiento promedio de las capas adyacentes. Garrett y Bailey [43] vuelven a tomar esta idea y desarrollan el Shear Lag para modelizar la fisuración transversa en apilados del tipo $[0, 90]_s$. Pagano [33], construye enseguida el modelo local el más completo de los modelos multiparticulares elásticos a partir del método de aproximación de Hellinger-Reissner. En este modelo cada capa es modelada por siete campos cinemáticos, el modelo es construido a partir de una aproximación en esfuerzo inyectada al funcional de Hellinger-Reissner. Los esfuerzos son aproximados por polinomios en z de tercer orden, las ecuaciones del modelo son obtenidas por el teorema variacional de Hellinger-Reissner [44]. Pagano hace aparecer en su modelo esfuerzos generalizados de interfase y subraya la ausencia de singularidades para sus campos. El modelo local es, a pesar de todo, pesado para manipular multicapas constituidos por un gran número de capas. Por ello, poco después Pagano y Soni [45] propusieron un modelo variacional global- local donde el espesor del laminado es dividido en dos regiones: la región local que contiene ciertas interfases y las capas más cercanas a estas interfases y la región global que son las capas restantes agrupadas en paquetes, modeladas por una placa homogénea. La ventaja de este modelo global - local con respecto al modelo local es la disminución del número de incógnitas y la precisión de este modelo depende de la selección de las interfases privilegiadas. En l' Ecole Nationale des Ponts et Chaussees de Francia, Chabot realizó la construcción de una familia de modelos multipartículas elásticos llamados M4 (modelos multipartícula de los materiales multicapa) a partir del método de aproximación de Hellinger-Reissner. El

modelo más completo es idéntico al modelo local de Pagano y se deduce a partir de éste los otros modelos mediante aproximaciones sucesivas de multicapas delgadas. En esta familia de modelos se encuentra el modelo M4-5N (modelo que utilizaremos) que tiene $5n$ campos cinemáticos para un multicapa de N capas. El M4-5N modela las capas por medio de una placa de Hellinger-Reissner. Este modelo se ha seguido desarrollando con A. Díaz [48] quien introdujo las deformaciones inelásticas a sus ecuaciones elásticas (la deformación elástica es igual a la deformación total menos la deformación inelástica). Debido a que el modelo M4-5n está basado en el método de aproximación de Hellinger-Reissner se hará una breve reseña del mismo.

2.2.1. Método de aproximación de Hellinger-Reissner

Se considera el multicapa de la figura 2.2

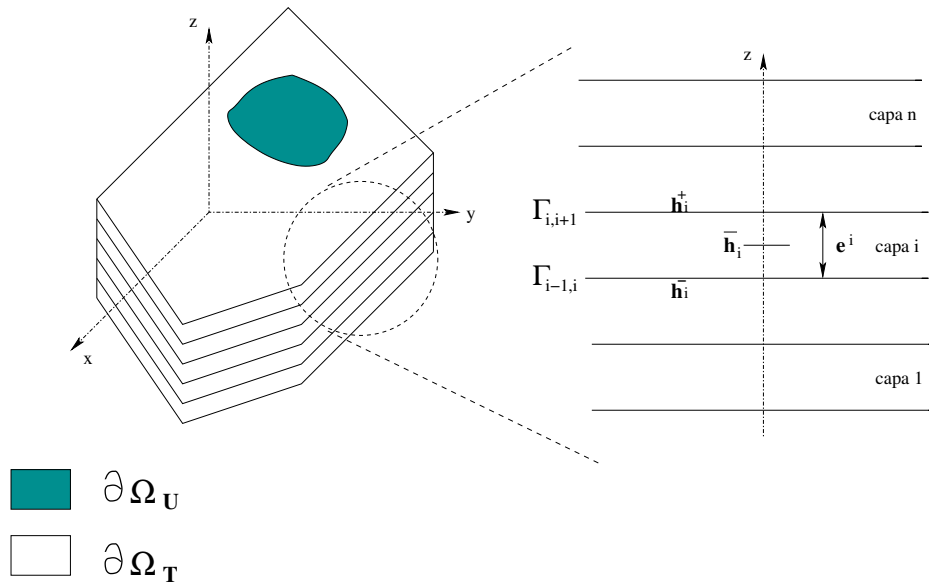


Figura 2.2: Geometría de los multicapas estudiados

El multicapa ocupa el volumen Ω de frontera $\partial\Omega$. El material se supone elástico y se adoptan las siguientes anotaciones:

- \underline{x} La variable de espacio
- $\overline{\overline{\overline{S}}}$ El tensor de complianzas de orden cuatro en \underline{x}
- $\overline{\overline{\sigma}}$ El tensor de esfuerzos 3D en \underline{x}
- $\overline{\overline{\sigma}}^*$ Un campo de tensor de orden 2 simétrico, de clase C^1 por trozos sobre Ω
- \underline{U} El tensor de desplazamientos 3D en \underline{x}
- \underline{U}^* Un campo de vector 3D continuo sobre Ω , de clase C^1 por trozos sobre Ω
- $\overline{\overline{\varepsilon}}$ El tensor de deformaciones 3D en \underline{x}
- \underline{U}^d Los desplazamientos impuestos sobre la parte $\partial\Omega_U$ de la frontera $\partial\Omega$
- \underline{T}^d Los esfuerzos impuestos sobre la parte $\partial\Omega_U$ de la frontera $\partial\Omega$
- \underline{f} Las fuerzas de volumen en \underline{x}

El funcional de Hellinger-Reissner sobre la pareja $(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*)$ para problemas puramente elásticos es :

$$\begin{aligned}
H.R.(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*) &= \int_{\Omega} \left[\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{\varepsilon}}(\underline{U}^*)(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) - \frac{1}{2} \overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{\overline{S}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) \right] d\Omega \\
&\quad - \int_{\partial\Omega_U} (\overline{\overline{\sigma}}^* \cdot \underline{n})(\underline{x}) \cdot (\underline{U}^* - \underline{U}^d)(\underline{x}) dS - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}^d(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) dS.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

El teorema de Reissner es el siguiente:

La solución del problema elástico es la pareja $(\underline{U}^, \overline{\overline{\sigma}}^*)$ que hace estacionaria la funcional H.R [44].*

En el trabajo de Díaz [48] se muestra cómo construir una solución aproximada a partir de una aproximación en esfuerzos, definiendo las siguientes etapas:

1. Se adapta H.R. para tomar en cuenta las deformaciones inelásticas, reemplazando la deformación elástica por la deformación total menos la deformación inelástica ($\varepsilon_{total} - \varepsilon_{in}$) y se realiza una integración por partes sobre $\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}$
2. Se definen los esfuerzos interiores generalizados y se escribe la aproximación de esfuerzos sobre un polinomio en z . Los coeficientes de los polinomios son funciones lineales de los esfuerzos interiores generalizados.
3. Se inyecta el campo de esfuerzos aproximados en el funcional H.R. y se identifican los desplazamientos generalizados y las deformaciones generalizadas coherentes con la aproximación en esfuerzo.

4. Haciendo una variación de H.R. con respecto a los desplazamientos interiores generalizados, se obtiene la ecuación de equilibrio generalizado y las condiciones de frontera generalizadas.
5. La estacionalidad de la funcional H.R. con respecto a una variación de los esfuerzos interiores generalizados da las ecuaciones de comportamiento.

Utilizando la aproximación Hellinger-Reissner y modificando la deformación elástica para el modelo M4-5n nos da como resultado la siguiente funcional:

$$\begin{aligned}
H.R.(\underline{U}^*, \overline{\sigma}^*) = & - \int_{\Omega} \left[\text{div} \overline{\sigma}^*(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) + \overline{\sigma}^* : \overline{\varepsilon}^{an} + \underline{f}(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) + \frac{1}{2} \overline{\sigma}^*(\underline{x}) : \overline{\mathbf{S}}(\underline{x}) : \overline{\sigma}^*(\underline{x}) \right] d\Omega \\
& - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_{\Gamma_{i,i+1}} (\overline{\sigma}^* \cdot \underline{e}_z)(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS \right) + \int_{\partial\Omega_U} (\overline{\sigma}^* \cdot \underline{n})(\underline{x}) \cdot \underline{U}^d(\underline{x}) dS \\
& + \int_{\partial\Omega_T} ((\overline{\sigma}^* \cdot \underline{n}) - \underline{T}^d)(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) dS
\end{aligned} \tag{2.2}$$

donde aparecen dos nuevas variables: $\overline{\varepsilon}^{an}$ que nos representa el tensor de deformaciones inelásticas y $\gamma_{i,i+1}$ el vector de discontinuidades de desplazamiento en la interfase $\Gamma_{i,i+1}$ entre las capas i e $i+1$. Estos dos tipos de campos se suponen conocidos.

2.2.2. Ecuaciones elásticas del modelo M4-5n

En esta parte se describen las ecuaciones desarrolladas por Díaz [48].

Campo de esfuerzos aproximados del modelo M4-5n

En la capa i ($1 \leq i \leq 2n$), se definen los esfuerzos generalizados en el plano resultantes N^i ($1 \leq \alpha, \beta \leq 2$)

$$N_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz; \tag{2.3}$$

los momentos generalizados en el plano resultantes M^i son:

$$M_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz; \tag{2.4}$$

y los esfuerzos generalizados de corte fuera del plano resultantes son definidos por:

$$Q_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}(x, y, z) dz; \tag{2.5}$$

En las interfases $\Gamma_{j,j+1}$ entre las capas j y $j+1$ ($1 \leq j \leq 2n$) se definen los esfuerzos generalizados de corte $\tau_{\alpha}^{j,j+1}$ ($1 \leq \alpha \leq 2$) y los esfuerzos normales generalizados $\nu^{j,j+1}$

$$\tau_{\alpha}^{i,j+1}(x, y) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) \tag{2.6}$$

$$\nu^{i,j+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_j^+) \quad (2.7)$$

Partimos del hecho que es un modelo de orden 3, es decir que los esfuerzos son aproximados por polinomios en z de tercer grado, queda una base definida $(P_j^i)_{0 \leq j \leq 3}$ de la forma:

$$\begin{cases} P_0^i = 1 \\ P_1^i = \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \\ P_2^i = 6 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2} \\ P_3^i = -2 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

La base polinomial utilizada es ortogonal ya que son polinomios de Legendre, por lo cual tienen la siguiente propiedad:

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_\alpha^i(z) P_\beta^i(z) dz = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \quad (2.9)$$

Los esfuerzos aproximados 3D en la capa i son:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{5n}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z) \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{5n}(x, y, z) &= Q_\alpha^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + (\tau_\alpha^{i,i+1}(x, y) - \tau_\alpha^{i-1,i}(x, y)) P_1^i(z) \\ &+ \left(Q_\alpha^i(x, y) - \frac{e^i}{2} (\tau_\alpha^{i,i+1}(x, y) + \tau_\alpha^{i-1,i}(x, y)) \right) P_2^i(z) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{5n}(x, y, z) &= \left(\frac{\nu^{i,i+1}(x, y) + \nu^{i-1,i}(x, y)}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \right) P_0^i(z) \\ &+ \left(\frac{e^i}{10} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) - \frac{\operatorname{div} \tilde{Q}^i(x, y)}{5} + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) \right) P_1^i(z) \\ &+ \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) P_2^i(z) \\ &+ \left(\frac{e^i}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) - \operatorname{div} \tilde{Q}^i(x, y) \right) P_3^i(z) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nota. $\tilde{\tau}^{0,1}$ y $\tilde{\tau}^{n,n+1}$ son los vectores esfuerzos exteriores de corte sobre la cara inferior de la capa 1 y superior de la capa n . $\nu^{0,1}$ y $\nu^{n,n+1}$ son los esfuerzos normales sobre la cara inferior de la capa 1 y superior de la capa n .

Desplazamientos generalizados

$U_\alpha^{i*}(x, y)$ es el campo de desplazamientos de membrana de la capa i

$$U_\alpha^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_\alpha^*(x, y, z) dz \quad (2.13)$$

$\Phi_\alpha^{i*}(x, y)$ es el campo de rotaciones de la capa i

$$\Phi_\alpha^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12 P_1^i(z)}{e^{i2}} U_\alpha^*(x, y, z) dz \quad (2.14)$$

$U_3^{i*}(x, y)$ es el campo promedio de desplazamiento normal de la capa i:

$$U_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz \quad (2.15)$$

Ecuaciones de equilibrio

Las 5 n ecuaciones de equilibrio generalizado son obtenidas utilizando la estacionalidad del funcional H.R. con respecto a los desplazamientos. Esta son las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{aligned} \tilde{div} \tilde{N}^i(x, y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y) &= 0 \quad \text{sobre el plano } \omega \\ \tilde{div} \tilde{Q}^i + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) &= 0 \quad \text{sobre el plano } \omega \\ \tilde{div} \tilde{M}^i(x, y) - \tilde{Q}^i(x, y) + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) &= 0 \quad \text{sobre el plano } \omega \end{aligned} \quad (2.16)$$

Deformaciones generalizadas

Introduciendo los esfuerzos aproximados en la funcional H.R., podemos identificar las deformaciones generalizadas compatibles con la aproximación de los esfuerzos. Las deformaciones generalizadas generalizadas de la capa i son:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^i &= \frac{1}{2} (\tilde{grad} \tilde{U}^i + \tilde{grad}^T \tilde{U}^i) \\ \tilde{\chi}^i &= \frac{1}{2} (\tilde{grad} \tilde{\Phi}^i + \tilde{grad}^T \tilde{\Phi}^i) \\ \tilde{d}_{\Phi}^i &= \tilde{\Phi}^i + \tilde{grad} U_3^i \end{aligned} \quad (2.17)$$

Las deformaciones de la interfase $j, j + 1$ entre las capas j y $j + 1$ son:

$$\tilde{D}^{j,j+1} = \tilde{U}^{j+1} - \tilde{U}^j - \frac{e^j}{2} \tilde{\Phi}^j - \frac{e^{j+1}}{2} \tilde{\Phi}^{j+1} \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

$$\tilde{D}_{\nu}^{j,j+1} = \tilde{U}_3^{j+1} - \tilde{U}_3^j \quad (2.20)$$

Deformaciones inelásticas generalizadas

De la misma manera la funcional permite identificar las deformaciones inelásticas generalizadas siguientes para $i \in [1, n]$, $j \in [1, n - 1]$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{i an}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_i^0(z)}{e^i} \varepsilon_{\alpha\beta}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (2.21)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{i an}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i^2}} P_i^1(z) \varepsilon_{\alpha\beta}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (2.22)$$

$$d_{\Phi\alpha}^{jan} = 2 (\varepsilon_{\Phi 3}^{jan} + \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^{jan}) \quad (2.23)$$

$$D_{\alpha}^{j,j+1an} = \gamma_{\alpha}^{j,j+1an} + e^j (2\bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{jan} - \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^{jan}) - e^{j+1} (2\bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{j+1an} + \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^{j+1an}) \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} D_{\nu}^{j,j+1an} &= \gamma_3^{j,j+1} + e^j \left(\frac{\varepsilon_{33}^{jan}}{2} + \frac{6}{5}\bar{\varepsilon}_{33}^{jan} + \tilde{\varepsilon}_{33}^{jan} \right) \\ &+ e^{j+1} \left(\frac{\varepsilon_{33}^{j+1an}}{2} - \frac{6}{5}\bar{\varepsilon}_{33}^{j+1an} - \tilde{\varepsilon}_{33}^{j+1an} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde $\varepsilon_{\alpha\beta}^{an}$, $\varepsilon_{\alpha 3}^{an}$, ε_{33}^{an} son las componentes del tensor inelástico 3D.

$$\varepsilon_{\alpha 3}^{ian}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} \varepsilon_{\alpha 3}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (2.26)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{ian}(x, y) = \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i \varepsilon_{\alpha 3}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (2.27)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^{ian}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} \varepsilon_{\alpha 3}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_{33}^{ian}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz \quad (2.29)$$

$$\bar{\varepsilon}_{33}^{ian}(x, y) = \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz \quad (2.30)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33}^{ian}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz \quad (2.31)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33}^{ian}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_3^i(z)}{e^i} \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz \quad (2.32)$$

y $\gamma_{\alpha}^{j,j+1an}$ es el vector de discontinuidades de desplazamientos.

Ecuaciones de comportamiento elástico

La estacionalidad de la funcional H.R. con respecto a los esfuerzos da las ecuaciones de comportamiento elástico generalizado. El comportamiento de esfuerzos de membrana de la capa i para $1 \leq i \leq n$ es:

$$\tilde{\varepsilon}^i(x, y) - \tilde{\varepsilon}^{ia}(x, y) = \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x, y) \quad (2.33)$$

El comportamiento de los momentos de flexión y de torsión en el plano de la capa i para $1 \leq i \leq n$ se escribe:

$$\tilde{\chi}^i(x, y) - \tilde{\chi}^{ia}(x, y) = \frac{12\tilde{\tilde{S}}^i}{e^{i3}} : \tilde{M}^i(x, y) \quad (2.34)$$

el comportamiento de los esfuerzos de corte fuera del plano de la capa i para $1 \leq i \leq n$ es:

$$\tilde{d}_{\Phi}^i(x, y) - \tilde{d}_{\Phi}^{ia}(x, y) = \frac{6}{5e^i} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \cdot (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \quad (2.35)$$

El comportamiento de los esfuerzos de corte en la interfase $i, i + 1$ para $1 \leq i \leq n - 1$ se escribe:

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{D}^{i,i+1a}(x, y) &= -\frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{Q}^{i+1} - \frac{e^i}{30} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{\tau}^{i-1,i} \\ &+ \frac{2}{15} (e^i \tilde{S}_Q^i + e^{i+1} \tilde{S}_Q^{i+1}) \cdot \tilde{\tau}^{i,i+1} - \frac{e^{i+1}}{30} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{\tau}^{i+1,i+2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde $(\tilde{S}_Q^i)_{\alpha\beta} = 4\mathbf{S}_{\alpha 3\beta 3}^i$.

El comportamiento de los esfuerzos normales en la interfase $i, i + 1$ para $1 \leq i \leq n - 1$ es:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\nu}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{D}_{\nu}^{i,i+1a}(x, y) &= \frac{9}{70} e^i S_{\nu}^i \nu^{i-1,i} + \frac{13}{35} (e^i S_{\nu}^i + e^{i+1} S_{\nu}^{i+1}) \nu^{i,i+1} \\ &+ \frac{9}{70} e^{i+1} S_{\nu}^{i+1} \nu^{i+1,i+2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $(\tilde{S}_{\nu}^i) = \mathbf{S}_{3333}^i$.

2.3. Desarrollo de las ecuaciones plásticas generalizadas

Como vimos en el párrafo anterior, las deformaciones inelásticas ya fueron introducidas en el comportamiento elástico del material. Sin embargo, en [48] no se determinaron estas deformaciones inelásticas pues se consideraron como datos del problema. Para determinar estas deformaciones inelásticas generalizadas se necesita definir el fenómeno estudiado (plasticidad, viscoplasticidad, etc) y utilizar un modelo. Se utilizará el modelo de plasticidad de Allix et al. [18] (ecuaciones 1.22 - 1.25 en las cuales no tomaremos en cuenta el daño) escrito en forma tridimensional y lo adaptaremos al M4-5n escribiéndolo en forma generalizada. Además, utilizaremos un modelo de plasticidad isotrópico de interfase entre las capas para calcular las eventuales discontinuidades de desplazamiento en la interfase (deslizamiento por ejemplo). En [48] se ha comprobado que las interfases entre las capas pueden no ser perfectas y puede haber deslizamientos tal y como lo muestra la figura 2.3.

En [48] se demuestra que el deslizamiento puede ser utilizado para predecir la delaminación por lo cual en esta tesis se decidió incorporar las discontinuidades $\gamma_{\alpha}^{j,j+1}$ en las interfases y modelarlas por un modelo plástico. El problema del desarrollo de las ecuaciones plásticas generalizadas se divide en tres partes principales:

1. Determinación de las ecuaciones de evolución plástica generalizada de la capa

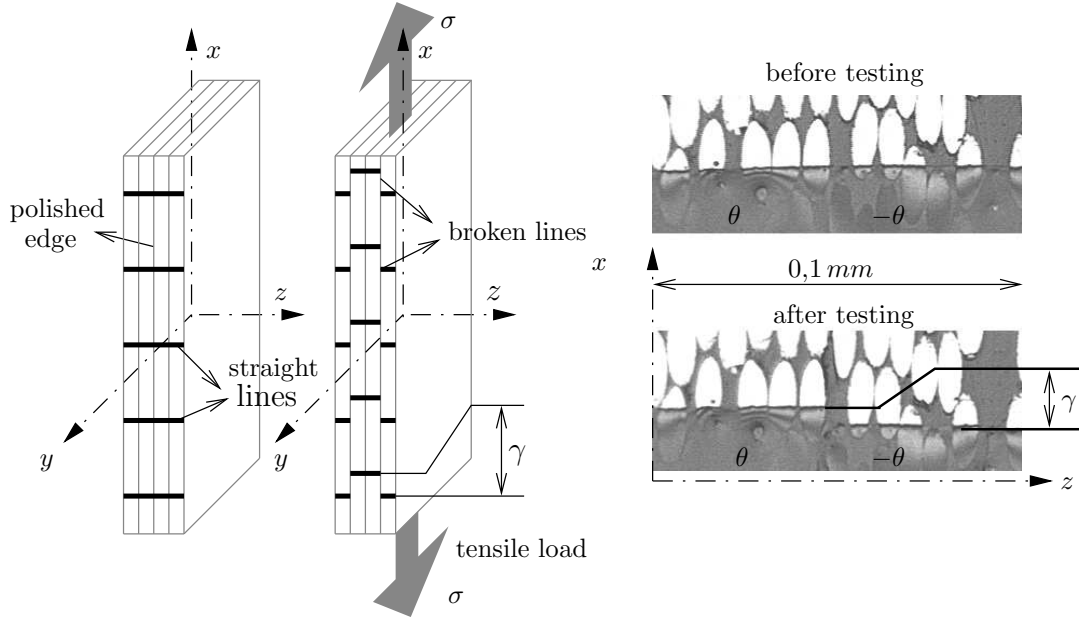


Figura 2.3: deslizamiento observado en la interfase de un multicapa simétrico $[\theta, -\theta]$

2. Determinación de la función de criterio plástico en esfuerzos generalizados de la capa
3. Determinación de las ecuaciones de evolución y criterio de plasticidad de la interfase

La división de los fenómenos plásticos en dos partes es debido a que se tendrá una deformación plástica acumulada constante en el espesor de la capa, con un criterio promedio en la capa y ecuaciones de evolución y criterio para la interfase. Una razón es que si se tiene un comportamiento plástico dependiente de z , el modelo se volvería tridimensional, quedando en contradicción con las premisas y objetivos que se plantean cuando se utiliza un modelo de placas como el M4-5n.

2.3.1. Determinación de las ecuaciones de evolución plástica generalizada de la capa

Con las ecuaciones del modelo M4-5n que incluyen las deformaciones inelásticas generalizadas se empezó a ver la estrategia de acoplar las ecuaciones de evolución plástica de Allix et. al. [18], para obtener los incrementos de deformación plástica generalizadas. Se parte de las ecuaciones 2.21 a la 2.32 y se propone una proyección del incremento de deformaciones inelásticas tridimensionales sobre la base de los polinomios ortogonales, esto es válido siempre y cuando el espesor de las capas no sea demasiado grande, las ecuaciones son:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}^p(x, y, z) = \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{ip} P_0^i(z) + e^i \dot{\chi}_{\alpha\beta}^{ip} P_1^i(z) \quad (2.38)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^p(x, y, z) = \dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^{ip} P_0^i(z) + 12 \dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^{ip} P_1^i(z) + \frac{5}{6} \dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^{ip} P_2^i(z) \quad (2.39)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p(x, y, z) = \dot{\varepsilon}_{33}^{i p} P_0^i(z) + 12 \dot{\varepsilon}_{33}^{i p} P_1^i(z) + \frac{5}{6} \dot{\varepsilon}_{33}^{i p} P_2^i(z) + \frac{5600}{563} \dot{\varepsilon}_{33}^{i p} P_3^i(z) \quad (2.40)$$

Se propone también una proyección de la plasticidad acumulada con un polinomio de orden cero.

$$p(x, y, z) = q_0^i(x, y) P_0^i(z) \quad (2.41)$$

La cual nos da la función de endurecimiento $R(p)$

$$R(p) = K_i p^{\psi_i} = K_i (q_0^i(x, y))^{\psi_i} \quad (2.42)$$

Hasta aquí hemos relacionado las deformaciones inelásticas tridimensionales con las generalizadas, la plasticidad acumulada y la función de endurecimiento plástico. Pero recordando la ecuación 1.21 la evolución de las deformaciones plásticas es gobernada por los esfuerzos a los que está sometido el material. Por ello se escriben primeramente las deformaciones inelásticas tridimensionales en función de los esfuerzos generalizados.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}^p &= \frac{\dot{q}_0^i(x, y)}{K_i (q_0^i(x, y))^{\psi_i + R_0^i}} \left(N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z) \right) \\ \dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^p &= \frac{\dot{q}_0^i(x, y)}{K_i (q_0^i(x, y))^{\psi_i + R_0^i}} Q_{\alpha}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + (\tau_{\alpha}^{i, i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1, i}(x, y)) P_1^i(z) \\ &\quad + \left(Q_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i, i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1, i}(x, y)) \right) P_2^i(z) \\ \dot{\varepsilon}_{33}^p &= \frac{\dot{q}_0^i(x, y)}{K_i (q_0^i(x, y))^{\psi_i + R_0^i}} (C_{\tau\nu} P_0^i(z) + D_{\tau\nu Q} P_1^i(z) + F_{\tau} P_2^i(z) + H_{\tau Q} P_3^i(z)) \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} C_{\tau\nu} &= \left(\frac{\nu^{i, i+1}(x, y) + \nu^{i-1, i}(x, y)}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y)) \right) \\ D_{\tau\nu Q} &= \left(\frac{e^i}{10} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y)) - \frac{\operatorname{div} \tilde{Q}^i(x, y)}{5} + \nu^{i, i+1}(x, y) - \nu^{i-1, i}(x, y) \right) \\ F_{\tau} &= \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y)) \\ H_{\tau Q} &= \left(\frac{e^i}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y)) - \operatorname{div} \tilde{Q}^i(x, y) \right) \end{aligned}$$

Teniendo los incrementos de deformaciones plástica expresados en esfuerzos generalizados, pero aún con su dependencia en z , ecuación 2.43, se iguala con las fórmulas 2.38, 2.39, 2.40 y se obtienen finalmente los incrementos de deformación plástica generalizada en función de los esfuerzos generalizados con independencia de z :

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{i p} = \frac{\dot{\Delta}^i}{e^i} N_{\alpha\beta}^i \quad (2.44)$$

$$\dot{\chi}_{\alpha\beta}^{i p} = \frac{12 \dot{\Delta}^i}{e^{i3}} M_{\alpha\beta}^i \quad (2.45)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^{i p} = \frac{\dot{\Delta}^i}{e^i} Q_{\alpha}^i(x, y) \quad (2.46)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^i p = \frac{\dot{\Delta}^i}{12} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \quad (2.47)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^i p = \frac{6}{5} \frac{\dot{\Delta}^i}{e^i} \left(Q_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \right) \quad (2.48)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^i p = \dot{\Delta}^i \left(\frac{\nu^{i,i+1}(x, y) + \nu^{i-1,i}(x, y)}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \right) \quad (2.49)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^i p = \frac{\dot{\Delta}^i}{12} \left(\frac{e^i}{10} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) - \frac{\operatorname{div} \tilde{Q}^i(x, y)}{5} \right) \quad (2.50)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^i p = \frac{6}{5} \dot{\Delta}^i \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \quad (2.51)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^i p = \frac{563}{5600} \dot{\Delta}^i \left(\frac{e^i}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) - \operatorname{div} \tilde{Q}^i(x, y) \right) \quad (2.52)$$

donde $\dot{\Delta}^i = \frac{q_0^i(x, y)}{K_i(q_0^i(x, y))^{\psi_i} + R_0^i}$

Se podría calcular las deformaciones inelásticas 2.21 - 2.25 pero hace falta determinar las discontinuidades dadas de desplazamiento γ_{α}^i en la interfase, esto lo haremos cuando modelemos la interfase en el párrafo 2.3.3.

2.3.2. Determinación de la función de criterio plástico en esfuerzos generalizados de la capa

Una vez establecidas las ecuaciones de incremento de deformación plástica se continua con la obtención de un criterio de plasticidad válido para el comportamiento de cada capa. Este criterio permitirá saber a partir de qué nivel de carga comienza a plastificar la capa en el punto considerado. Se parte de una función criterio 3D con factores de peso φ que representan la anisotropía propia del material, como muestra la siguiente ecuación:

$$f(\sigma, R(p)) = \sqrt{\varphi_{11}(\sigma_{LL})^2 + \varphi_{12}(\sigma_{LT})^2 + \varphi_{13}(\sigma_{LN})^2 + \varphi_{22}(\sigma_{TT})^2 + \varphi_{23}(\sigma_{TN})^2 + \varphi_{33}(\sigma_{NN})^2} - (K^i(q_0^i)^{\psi_i} + R_0^i) \leq 0 \quad (2.53)$$

Se decide por tomar un criterio promedio en la capa, ya que al tratarlo en dependencia de z se haría cuasi tridimensional y esto nos quitaría las ventajas de utilizar la reducción dimensional que nos da el modelo originalmente. Además se haría un criterio tan restrictivo y puntual que se volvería impráctico el utilizarlo e incluso nos daría resultados confusos de interpretar. Por ejemplo, en ciertos puntos de la capa seguramente habrá un estado de esfuerzos tal que pueda generarse plasticidad en dicho punto pero sin embargo podría ser despreciable con respecto al comportamiento global en el espesor de la capa. Por ello se realiza la integración de la función criterio dándonos un frente de plasticidad homogéneo en el espesor de la capa. El criterio de plasticidad que manejaremos será el siguiente:

$$F(\sigma_i, R(p)_i) \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sqrt{\tilde{\varphi} \sigma(\tilde{z})^2} dz = K^i (q_0^i)^{\psi_i} + R_0^i \quad (2.54)$$

donde $\tilde{\sigma}(z)^2$ es la función de esfuerzos generalizados obtenidos en la ecuación 2.53 y 2.10 - 2.12

2.3.3. Determinación de las ecuaciones de evolución y criterio de plasticidad de la interfase

Ya establecida la función criterio de la capa, se continua con el desarrollo del tratamiento de la interfase. Esto se realiza porque la mayoría de los fenómenos de delaminación de los multicapas se encuentran en la interfase, por lo que es necesario tener ecuaciones que nos permitan simular la plasticidad de la interfase que se presentan en los ensayos [Díaz] La interfase se modela con un comportamiento rígido plástico perfecto y como un medio isotrópico utilizando el desviador de esfuerzos como criterio de flujo plástico. Esta suposición es válida ya que la interfase está compuesta casi exclusivamente de la matriz del compuesto. Además se realizan otras suposiciones como veremos más adelante ya que los datos que se manejan en la interfase son el deslizamiento entre las capas. En lugar de las deformaciones plásticas de la interfase se tienen que sustituir por los campos de desplazamientos o de deslizamientos de la interfase, por lo que se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ \dot{\varepsilon}_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \\ \dot{\varepsilon}_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Los terminos $\frac{\partial U_z}{\partial x}$ y $\frac{\partial U_z}{\partial y}$ que están relacionado con la flexión de las capas son despreciados, ya que a pesar de que las capas se doblen esto no indica que la interfase se deforme y plastifique. Teniendo estas relaciones y reducciones se integran para obtener la relación directa con los desplazamientos o deslizamientos, obteniendo las ecuaciones:

$$e^j \dot{\varepsilon}_{zz}^j = \dot{\gamma}_z^j \quad (2.56)$$

$$e^j \dot{\varepsilon}_{xz}^j = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_x^j \quad (2.57)$$

$$e^j \dot{\varepsilon}_{yz}^j = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_y^j \quad (2.58)$$

Nota. Es importante aclarar que en las ecuaciones (2.56 - 2.58) de interfase que seguirán, j representa la interfase entre las capas j y $j+1$. Por otro lado e^j es el espesor de la interfase, $\dot{\gamma}_z^j$, $\dot{\gamma}_x^j$, $\dot{\gamma}_y^j$ son los incrementos de discontinuidades de desplazamiento o de deslizamiento en la interfase (ver figura 2.4).

Se define entonces un desplazamiento plástico acumulado q^j para la interfase considerada:

$$\begin{aligned} \dot{q}^j &= e^j \dot{p}^j \\ q^j &= \int_{historia} e^j \dot{p}^j dt = e^j p^j \end{aligned} \quad (2.59)$$

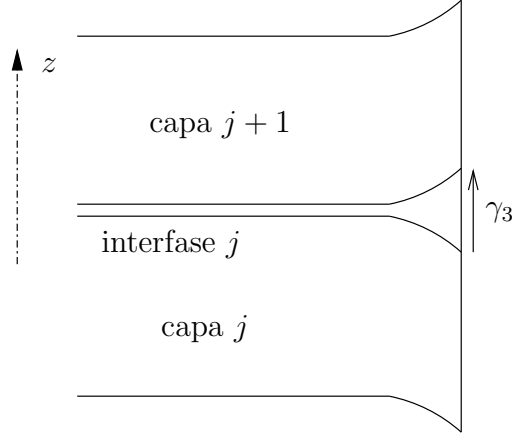


Figura 2.4: discontinuidad de desplazamiento vertical en la interfase

Este desplazamiento acumulado está relacionado con las discontinuidades $\dot{\gamma}_\alpha^j$ por la ecuación

$$\dot{q}^j = \sqrt{\frac{2}{3} ((\dot{\gamma}_z^j)^2 + (\dot{\gamma}_x^j)^2 + (\dot{\gamma}_y^j)^2)} \quad (2.60)$$

La función criterio de la interfase j entre las capas j y j + 1 queda establecida por la siguiente ecuación:

$$f(\tau^j, \nu^j, R(q^j)) = \sqrt{(\nu_{zz}^j)^2 + 3(\tau_{xz}^j)^2 + 3(\tau_{yz}^j)^2} - (R(q^j) + R_0^j) \quad (2.61)$$

donde $R(q^j)$, R_0^j son respectivamente la función de endurecimiento plástico de la interfase j y el parámetro inicial para inicio de plasticidad de la interfase.

Las ecuaciones de flujo plástico son determinadas por el gradiente del criterio de plasticidad escrito 2.61.

$$\dot{\gamma}_z^j = \dot{q}^j \frac{\nu^j}{R(q^j) + R_0^j} \quad (2.62)$$

$$\dot{\gamma}_x^j = 6\dot{q}^j \frac{\tau_{xz}^j}{R(q^j) + R_0^j} \quad (2.63)$$

$$\dot{\gamma}_y^j = 6\dot{q}^j \frac{\tau_{yz}^j}{R(q^j) + R_0^j} \quad (2.64)$$

2.4. Conclusiones

En este capítulo se empezó con una breve revisión de los modelos que se han utilizado para evaluar los esfuerzos de interfase y los efectos de borde, percibiendo que una de las mayores dificultades que se presentan son las singularidades en la interfase provocadas por los métodos de homogenización que se utilizan para obtener las propiedades mecánicas de la capa. Además se mencionan los problemas que se presentan con los métodos de elemento finito: sus resultados no pueden converger en la interfase y bordes del multicapa. Se hace incapié en los métodos multipartícula, en especial el M4-5n, que nos reducen las dimensiones del problema de 3D a 2D y nos acotan las discontinuidades que se presentan en la interfase, lo cual nos permite evitar los resultados con singularidades que nos dan los otros métodos. Al comenzar la obtención de las diferentes ecuaciones de evolución plástica y criterios de plasticidad se observa la necesidad de dividir el problema en dos partes: la capa y la interfase. Esto es debido a que se prefirió utilizar el concepto de frentes de plasticidad que se van propagando en el plano de la capa, en vez de hacer un análisis puntual que puede acarrear análisis de frentes de plasticidad en la dirección del espesor. Este análisis sería demasiado pesado y computacionalmente costoso e incluso innecesario en la mayoría de los casos. Por tomar una plasticidad homogeneizada en el espesor de la capa se tienen que obtener ecuaciones específicas para las interfases, las cuales presentan deslizamientos y esfuerzos característicos que provocan el inicio de delaminación del multicapa. Se obtuvieron ecuaciones de evolución plástica que nos permiten observar la plasticidad en las interfases y los bordes de un multicapa. Esto nos da en resumen un modelo de placas laminadas que puede tomar en cuenta efectos de borde y plasticidad que por revisión bibliográfica no existe hasta la fecha. En este modelo a pesar de que se pudo obtener un adecuado acoplamiento del fenómeno de la plasticidad, carece de la parte de daño por la razón principal de la complejidad que envuelve al daño y la falta de tiempo para llevarlo a cabo, por ello se deja para un trabajo posterior.

En el capítulo siguiente se aplicará el modelo desarrollado a la tensión de un multicapa con bordes libres y se hará su implementación numérica. También se mostrarán los resultados numéricos de algunos ejemplos.

Capítulo 3

Cálculo de efecto de borde en un multicapa plástico en tensión

3.1. Introducción

Como se ha visto en el capítulo anterior, el problema de analizar laminados multicapa con efecto de borde radica en que los métodos tradicionales como elementos finitos tridimensionales dan resultados infinitos en los bordes, imposibilitando un análisis adecuado en esta región [49]. S. Wang y Yuan [36] adoptaron un acercamiento híbrido [36] que combina la solución de campos singulares con elementos finitos tridimensionales para la solución alejada del borde. El tamaño de los elementos híbridos depende de la intensidad de la singularidad. Bar-Yoseph y Ben-David [36] introdujeron un elemento de transición en conjunto con los elementos finitos híbridos. El elemento de transición es esencialmente un esquema de mallado adaptativo. En resumen, el propósito de una solución completa para el campo de esfuerzos laminados continúa siendo un tópico de investigación [50] - [52]. El problema es que el laminado puede contener múltiples singularidades, donde cada una tiene sus propias características dependiendo de las propiedades de la capa y la geometría local del laminado. Así una solución completa de campos de esfuerzos llega a ser intratable con elementos finitos tridimensionales ya sea híbridos o convencionales, por lo cual es necesario un replanteamiento del problema. Por otro lado, en todos estos trabajos no se considera el eventual comportamiento plástico del material.

Por los motivos anteriores, en este capítulo, nosotros proponemos un replanteamiento del problema de cálculo de efecto de borde utilizando el modelo M4-5N con plasticidad desarrollado en el capítulo anterior. Con este modelo, los esfuerzos calculados no presentan singularidades y además toman en cuenta una eventual plasticidad en el material. Los cálculos y el algoritmo que desarrollaremos en este capítulo serán de un multicapa en tensión con un número de capas variables y con plasticidad en las capas y en las interfases. Los algoritmos que presentamos no son quizás los óptimos pero son los que nos permitirán ilustrar rápidamente la riqueza y pertinencia de nuestro modelo para modelar fenómenos plásticos en multicapas con efecto de borde. El modelo desarrollado puede entonces ayudar en la predicción de la delaminación debida a efectos de borde en multicapas plásticas.

Este tercer capítulo comienza con el planteamiento del problema de un multicapa in-

elástico en tensión y las ecuaciones correspondientes. Luego, se desarrolla la lógica empleada para la realización del algoritmo computacional. Después, se realiza una validación numérica del programa elaborado. Finalmente, se muestran algunos ejemplos de aplicación y una discusión de los resultados.

3.2. Planteamiento del problema

Se considera un multicapa simétrico en tensión como lo muestra la figura 3.1. Se impone una deformación global ε de tensión en la dirección de las x . El número de capas es un parámetro del problema que puede variar. Cada capa está hecha de un material plástico cuyo comportamiento puede ser modelado por el modelo de Allix et. al. [18]. Las interfases entre las capas no son perfectas pues pueden plastificar. El objetivo es evaluar los esfuerzos de interfase, los deslizamientos en las interfases y las deformaciones plásticas provocadas por la deformación impuesta ε .

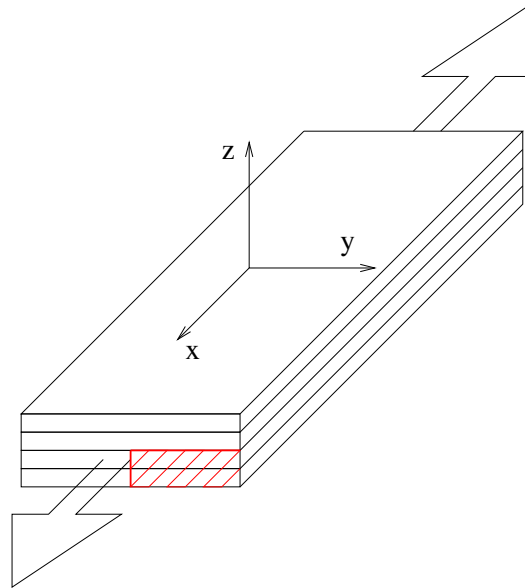


Figura 3.1: Laminado en tensión

Se aplica el modelo desarrollado en el capítulo anterior y se desea entonces resolver las ecuaciones del modelo. Se hace la suposición de que el laminado es infinitamente largo en la dirección de las x por lo cual desaparece la dependencia de x . El problema se divide numéricamente en dos partes:

1. La parte elástica resuelta por Díaz et. al. [48], mediante el software que elaboraron llamado DEILAM y que nos permite calcular los efectos de borde en el multicapa en tensión mediante el M4-5N. Este software toma en cuenta las simetrías del problema y restringe su resolución al cuarto de sección achurado de la figura 3.1. Las ecuaciones que resuelve son las de comportamiento elástico (2.33-2.37) y las ecuaciones de equilibrio

(2.16), con las cuales crea un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado, como el siguiente:

$$\frac{d^2 \tilde{\rho}(y)}{dy^2} = \tilde{M} \tilde{\rho}(y) + \tilde{C}(y) \quad (3.1)$$

donde $\tilde{\rho}$ representa un vector solución desconocido cuyas componentes son los esfuerzos y desplazamientos generalizados; \tilde{M} es una matriz constante cuyos coeficientes están relacionados con las propiedades elásticas del material y su geometría; \tilde{C} es un vector que contiene la deformación global impuesta ε y las deformaciones inelásticas globales (recordemos que Díaz maneja las deformaciones inelásticas como datos conocidos [48]). Este sistema de ecuaciones diferenciales es resuelto a través de elementos finitos unidimensionales.

2. La segunda parte del problema se realiza con las ecuaciones de evolución y criterio plástico obtenidas en el capítulo 2 de esta tesis. Se empieza con el cálculo del incremento de deformaciones plásticas de la capa i a través de las ecuaciones (2.44-2.52). Estas se calculan cuando se cumpla la función criterio (2.53). Para evaluar esta función criterio se hace una integración en el espesor de la capa, utilizando una cuadratura de Lobatto [53] que nos mantiene un error menor a $1e10^{-6}$. Es importante remarcar la importancia de un algoritmo adecuado para la integración ya que un valor inexacto nos daría resultados de plasticidad falsos. Después de calcular la plasticidad en la capa se continúa con el cálculo de las ecuaciones de criterio y evolución plástica para la interfase. En la interfase se utiliza una función criterio para medios isotrópicos basada en el desviador de esfuerzos (2.53) para después continuar con las ecuaciones de evolución, obtenidas por el gradiente de la función criterio (ecuaciones 2.62-2.64).

Estos dos programas se acoplan a través del vector \tilde{C} que contiene en sus componentes a la deformación total impuesta y a las deformaciones inelásticas supuestas. Basicamente el algoritmo empieza cuando se le da una deformación total y se inyecta un vector de deformaciones inelásticas temporales que va a ir cambiando el valor de sus componentes en cada iteración hasta que encuentre una convergencia de valores.

3.3. Implementación numérica

El algoritmo que se utiliza para resolver las deformaciones y desplazamientos inelásticos basicamente es parecido al algoritmo visto en el capítulo uno, la diferencia principal es que DEILAM (que se encarga de resolver la parte elástica) resuelve a través de elemento finito por lo tanto utiliza un mallado. Esto modificará el algoritmo utilizado en TCPL ya que los criterios y ecuaciones de evolución se tendrán que verificar por nodo y obviamente tendrán también una dependencia por capa o interfase. En resumen tendremos que verificar el criterio de plasticidad $n \times m$ veces para la plasticidad en la capa y $n \times j$ para la interfase (donde n es el número de nodos, m el número de capas y j el número de interfase). Los datos de incremento plástico se tendrán que guardar a través de hipermatrices de $n \times m \times d_{\text{capa}}$ para la capa y $n \times j \times d_{\text{interfase}}$ para la interfase, donde d_{capa} y $d_{\text{interfase}}$ representan el número de deformaciones plásticas guardadas por capa e interfase respectivamente. La

lógica del algoritmo es sencilla (ver figura 3.2), se utiliza primeramente una deformación total impuesta y vectores de deformación inelásticas supuestas, por nodo n , por capa m y por interfase j , después se llama al programa DEILAM el cual va a arrojar los esfuerzos por nodo, capa e interfase. Después se va tomando cada uno de los valores de esfuerzos por nodos y se verifica el criterio de plasticidad requerido y si es válido se pasa a la rutina de calcular los incrementos de plasticidad en ese nodo (15 deformaciones plásticas por capa y tres desplazamientos plásticos por interfase). Una vez que se obtienen los resultados inelásticos se inyectan a DEILAM el cual a su vez va a arrojar nuevos resultados de esfuerzos generalizados, que se utilizarán en el algoritmo para recalculer las deformaciones plásticas, hasta obtener una convergencia en las deformaciones plásticas. El resultado se puede visualizar como un frente de plasticidad que se va propagando en la dirección de las y ya sea en la capa, en la interfase o en ambos.

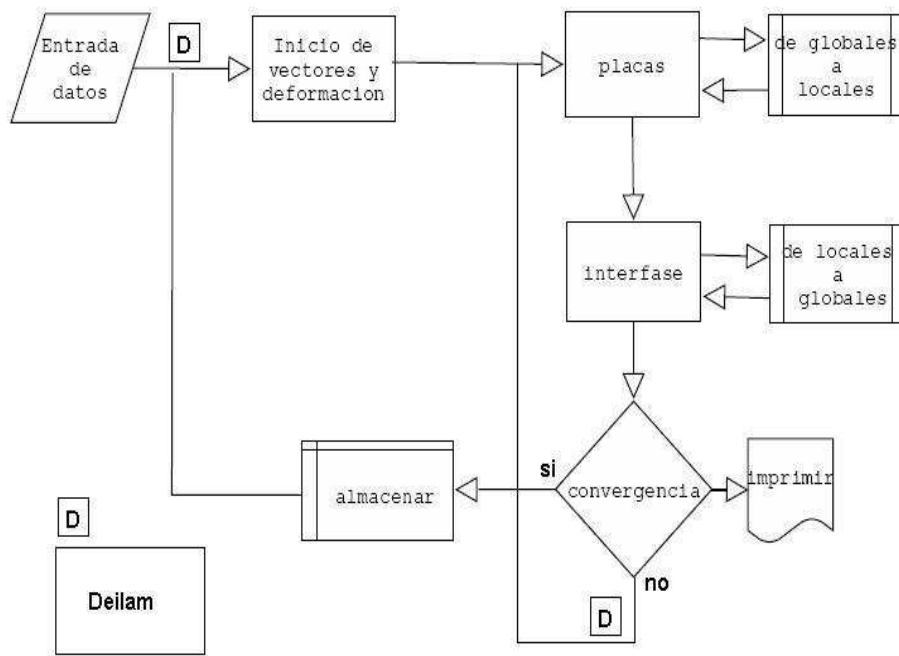


Figura 3.2: Diagrama de flujo del algoritmo de plasticidad en capa e interfase.

El algoritmo fue implementado en MATLAB, que es un entorno integral de desarrollo, para validar primeramente las suposiciones de las cuales partimos y comprobar que convergían los resultados. Hasta el momento al programa le falta optimización ya que la comunicación con DEILAM se hace a través de archivos ASCII haciendo lento al programa pues cada lectura es un llamado al disco duro ... Esto se puede mejorar si se utilizan punteros o localidades de memoria. Además se puede cambiar el método utilizado para que sea un Newton-Rapshon en vez de un punto fijo. Todas estas mejoras se realizarán en un trabajo posterior a esta tesis para su integración final al software MACLAM (este incluye a DEILAM) desarrollado en el CIMAV y que por el momento realiza unicamente cálculos elásticos. El programa converge para deformaciones menores del 2%, pero a mayores deformaciones se empieza a tener problemas de convergencia. Este rango de convergencia es suficiente para

los materiales que se simulan ya que una deformación de 1% hay por lo regular una falla del material. Hay que recordar que para deformaciones mayores o cercanas al 10% ya no es válido modelar con las ecuaciones de pequeños desplazamientos ya que se cae en la zona de grandes deformaciones y de no linealidad geométrica.

3.4. Validación

En esta parte, comenzamos por validar nuestra implementación numérica del modelo desarrollado en el capítulo 2 aplicado a la tensión de un multicapa plástico. Esta validación nos dirá únicamente si se programaron correctamente las ecuaciones y si el modelo desarrollado arroja resultados coherentes con la TCPL lejos de los bordes. La validación de la idea de un frente de desplazamiento plástico acumulado constante en el espesor de la capa se realizará en un trabajo posterior mediante el cálculo de elementos finitos 3D para un cuatricapa plástico. Es importante subrayar que el modelo M4-5N y el software DEILAM ya fueron validados para problemas elásticos [48].

Comencemos por considerar un multicapa $(90_2)_s$ hecho de un compuesto carbono epoxy unidireccional con las propiedades siguientes:

E_L	125.75e9 [GPa]	G_{LT}	4.77e9 [GPa]
E_T	9.1e9 [GPa]	R_0	11.2e6 [MPa]
ν	0.34	a	0.168
K	370e6	m	2.5

Cuadro 3.1: Propiedades del carbono-epoxy

En este multicapa no existe efecto de borde pues se trata de un unidireccional. Los cálculos de nuestro modelo desarrollado en el capítulo 2 son comparados con los resultados analíticos de Khoa Van [22] (estos han sido validados experimentalmente). Nuestros cálculos dan resultados independientes de y , lo cual confirma que no hay efecto de borde. Además, nuestros cálculos dan los mismos resultados que los analíticos de Khoa Van [22]. Esto es normal pues ambos cálculos parten del mismo modelo : el de Allix et.al. [18]. En la figura 3.3 se muestra que la gráfica teórica de esfuerzo-deformación para este laminado $(90_2)_s$ es la misma para ambos métodos de cálculo.

De igual manera, consideramos un multicapa $(45_2)_s$ hecho del mismo material que el anterior. Nuevamente, no hay efectos de borde y nuestros cálculos dan los mismos resultados que el analítico (ver figura 3.4).

Consideremos ahora un multicapa $(0, 90)_s$ de ancho 8 veces mayor que su espesor total (el espesor de capa es de 1 mm). El material de cada capa es el mismo carbono/epoxy considerado en los casos anteriores. Comparemos en este caso nuestros cálculos del M4-5N plástico con los resultados de la TCPL del capítulo 1. Esta comparación es válida ya que el comportamiento aparente de un laminado con un ancho considerable no se verá afectado por los fenómenos que ocurren en el borde. En la figura 3.5 se muestra que efectivamente, el comportamiento global predicho por el M4-5N plástico es el mismo que el de la TCPL.

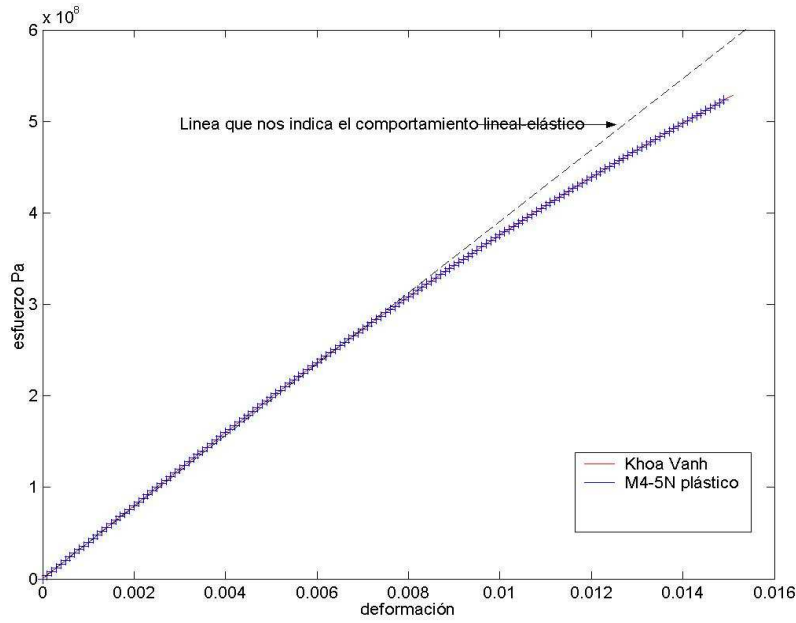


Figura 3.3: Gráfica esfuerzo-deformación de un laminado unidireccional de 90. Comparación analítico - M4-5N plástico

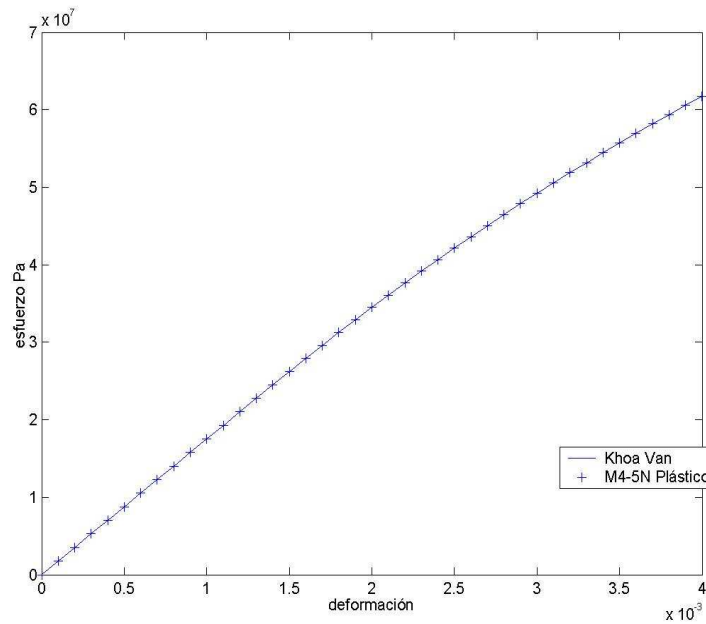


Figura 3.4: Gráfica esfuerzo-deformación de un laminado unidireccional de 45. Comparación analítico - M4-5N plástico

En las figuras 3.6 y 3.7 se muestra como varía el promedio del esfuerzo σ_{11} entre el centro del multicapa ($y = 0$) y el borde derecho del laminado ($y = 16mm$) para dos niveles de deformación. En la figura 3.6, el nivel de deformación es de $\varepsilon=0.25\%$ justo cuando empieza a plastificar el material en el borde para el modelo M4-5N plástico. En esta figura podemos apreciar el efecto de borde sobre el esfuerzo σ_{11} . Suficientemente lejos del borde ($y < 9$), el efecto de borde es despreciable y el M4-5N plástico da los mismos resultados que la TCPL. En la figura 3.7, el nivel de deformación es de $\varepsilon=0.4\%$ y para este nivel de deformación ya existe deformación plástica como lo veremos más adelante. Nuevamente, podemos ver una buena correspondencia entre los resultados del M4-5N y la TCPL lejos del borde.

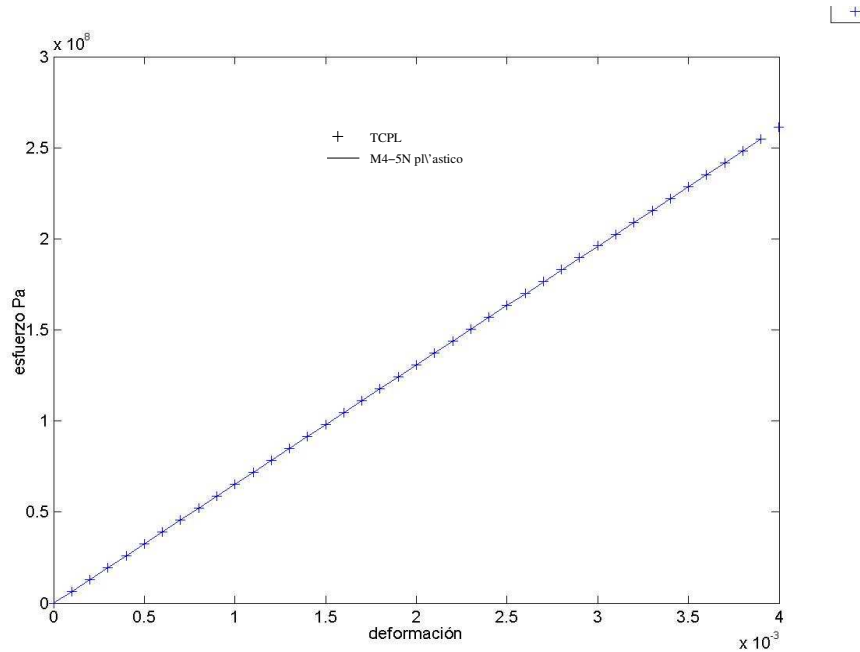


Figura 3.5: Gráfica esfuerzo-deformación de un laminado $[0\ 90]_s$. Comparación TCPL - M4-5N plástico

Veamos ahora como difieren las deformaciones plásticas ε_{11}^{an} calculadas por la TCPL y las calculadas por el M4-5N plástico para el mismo multicapa $(0, 90)_s$. En las figuras 3.8 y 3.9 se muestra la evaluación de ε_{11}^{an} en la capa a 90 para los dos tipos de cálculo y para dos niveles de deformación $\varepsilon=0.32\%$ y $\varepsilon=0.4\%$. Podemos apreciar que existe un efecto de borde sobre la deformación inelástica y que además, lejos del borde, la TCPL y el M4-5N plástico arrojan los mismos resultados.

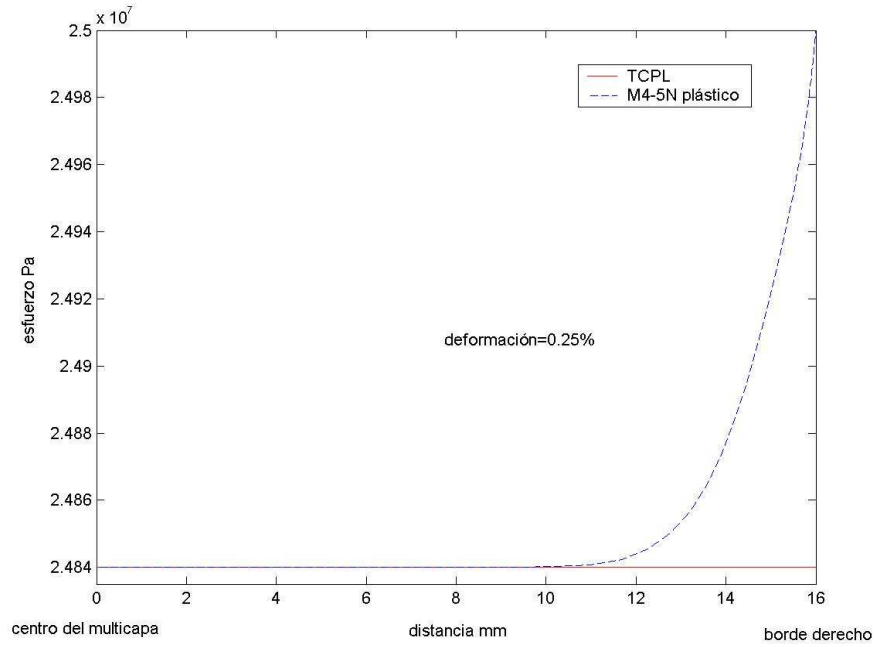


Figura 3.6: Gráfica de esfuerzo σ_{11} en la capa de 90 para $\varepsilon=0.25\%$. Comparación - M4-5N plástico

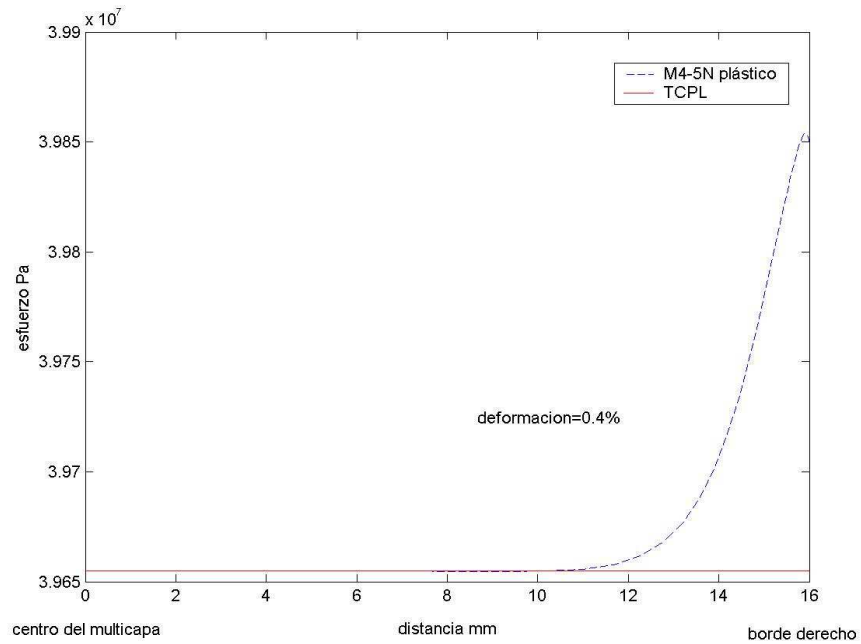


Figura 3.7: Gráfica de esfuerzo σ_{11} en la capa de 90 para $\varepsilon=0.4\%$. Comparación TCPL-M4-5N plástico

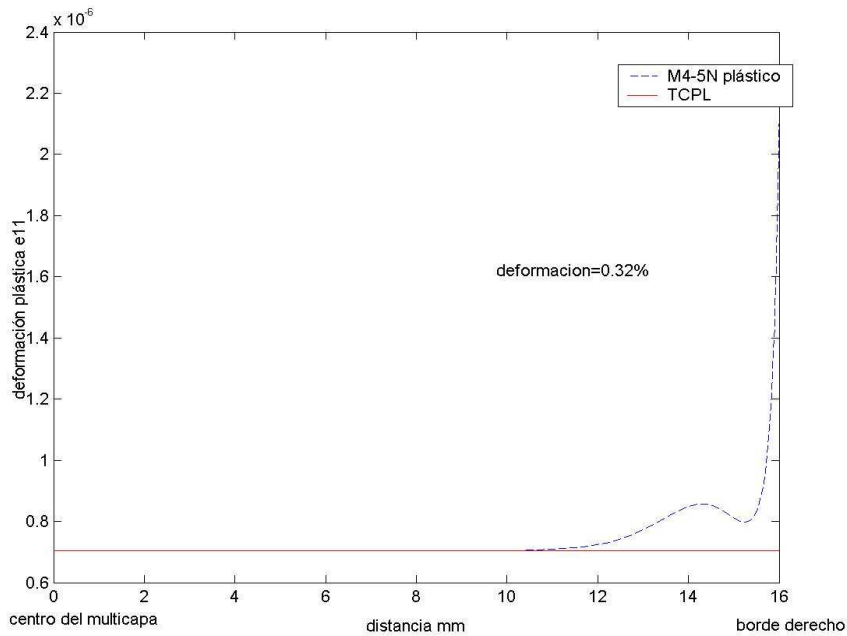


Figura 3.8: Gráfica de deformación plástica ϵ_{11}^{an} en la capa de 90 para 0.32%. Comparación TCPL- M4-5N plástico

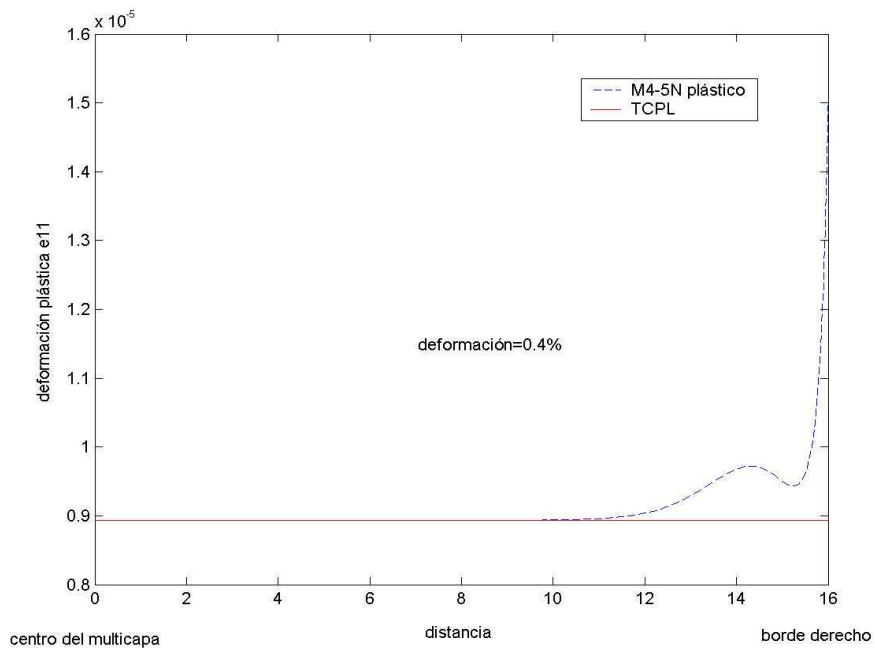


Figura 3.9: Gráfica de deformación plástica ϵ_{11}^{an} en la capa de 90 para 0.4%. Comparación TCPL- M4-5N plástico

3.5. Estabilidad y convergencia del algoritmo.

El código elaborado presenta, como ya se hab'ia comentado antes, una convergencia adecuada de resultados para deformaciones menores del 2%, aunque la velocidad de convergencia dependa del laminado y las propiedades plásticas del material. Esto se debe principalmente a la falta de una optimización numérica para que siga las deformaciones inelásticas obtenidas y realice una mejor predicción de los vectores semilla o vectores iniciales de deformaciones inelásticas. Es importante remarcar que las posibles fallas de convergencia se deben sobre todo a cambios bruscos de la función criterio de plasticidad; por ejemplo cuando la función de endurecimiento plástico es relativamente baja se tiende a la región de plasticidad perfecta y el algoritmo tiende a disminuir su rango de convergencia, esto es por los grandes cambios que se presenta de una iteración a otra. En estos casos se tendría que replantear el algoritmo para asegurar una convergencia, más esto se sale de los objetivos de esta tesis. Otro punto importante por optimizar es adimensionar el problema para no tener el caso de cantidades físicas con órdenes de magnitud muy diferentes lo cual implica inestabilidad en los algoritmos. El error relativo del algoritmo es variable de acuerdo con las necesidades y rapidez de resultados que se quiera tener, ya que un rango pequeño de error implica un mayor número de iteraciones. Al algoritmo se le hicieron diferentes pruebas para ver su estabilidad al paso de deformación global impuesto y dio resultados satisfactorios como muestra la gráfica 3.10. En esta gráfica se puede observar el cambio de la variable de discontinuidades γ_y en el borde del multicapa con los esfuerzos τ_{yz} de interfase en el borde (ordenadas), con una deformación global impuesta creciente. Se utilizarón tres pasos de incremento de deformación global impuesta, dando practicamente los mismos resultados.

La estabilidad y convergencia de la parte elástica de DEILAM ha sido validada por Diaz et.al. [24]. Para el caso especial de este laminado se utilizó un mallado de 50 nodos (suficientes para obtener convergencia de resultados en los bordes).

3.6. Ejemplo de aplicación

La delaminación es uno de los modos de fallo más frecuentes en los laminados multicapa, debido a que las uniones no son perfectas y a la concentración de esfuerzos en los bordes del laminado. Por ello es muy importante el poder encontrar criterios que nos permitan predecir una delaminación. Las formas de obtener un criterio, normalmente son a través del estado de esfuerzos en la interfase o las discontinuidades de los desplazamientos en la interfase. Con el código vamos a ver primeramente los esfuerzos τ_{yz} que se generarían en un modo de fractura II. Se realizaron tres simulaciones, primeramente con el comportamiento elástico, segundo con plasticidad en la interfase y tercero con plasticidad en la capa y en la interfase. La figura 3.11 muestra que los tres tipos de cálculo dan practicamente un mismo campo de esfuerzos de interfase τ_{yz} en la interfase 0/90. Esto nos indica que un criterio de delaminación sobre el valor máximo de τ_{yz} arrojaría un mismo valor de carga crítica para un cálculo con capas plásticas y para un cálculo y para un cálculo con capas e interfases inelásticas. Esto puede ser debido al fuerte coeficiente de endurecimiento plástico K aunado a la particularidad del multicapa $(0, 90)_s$. También hay que mencionar que probablemente a deformaciones mayores se empezaría a ver una separación un poco mayor de los esfuerzos pero esto sería un poco

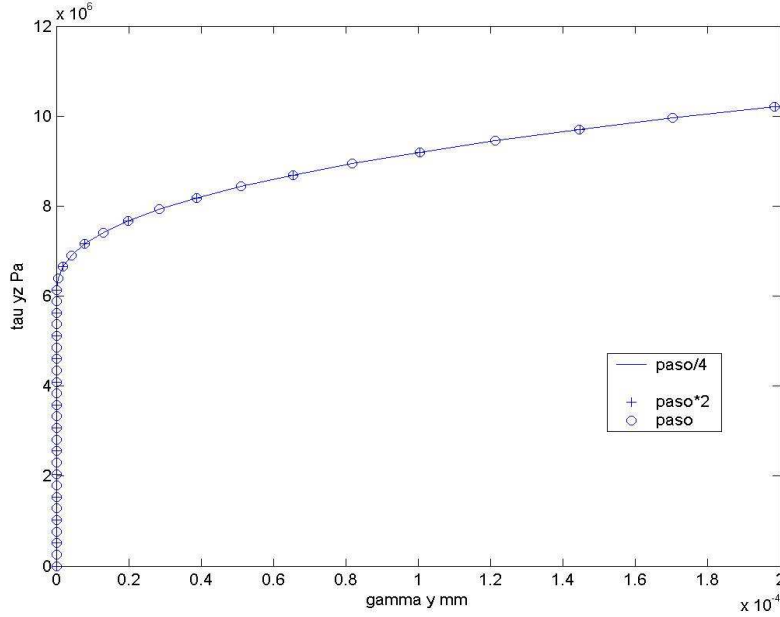


Figura 3.10: Gráfica de τ_{yz} vs. γ_y en el borde para tres diferentes pasos de incremento

alejado de la realidad, ya que experimentalmente un laminado con deformaciones cercanas al 1 % puede fallar de una manera global y no necesariamente es por un proceso de delaminación. Claro está que éste es un punto que se deberá hacerse más robusto para que el código pueda simular otros tipos de mecanismos de plasticidad que ocurren en la interfase, aunque podemos remarcar que ese es un problema más de implementación numérica que de modelado, ya que el modelo quedó terminado para aceptar los tres distintos tipos de plasticidad más usuales (plasticidad con endurecimiento, plasticidad perfecta y plasticidad con suavizamiento).

En la gráfica 3.12 se puede apreciar la evolución del deslizamiento γ_y en la interfase 0/90 y en función de la posición en el ancho del laminado para un cálculo de tipo capas-interfases plásticas y un cálculo de tipo solo interfase plástica. Se puede observar que la plasticidad de la capa no afecta a la de la interfase para un $[090]_s$ con endurecimiento plástico de interfase. Por ende los resultados de deslizamiento de interfase para un laminado con plasticidad solo en la interfase son iguales a un multicapa con plasticidad en interfase y capa. Esta gráfica es notable ya que se había mencionado anteriormente que un criterio de delaminación puede involucrar un valor crítico de la discontinuidad de los desplazamientos en la interfase. Díaz [48] demostró, que laminados $(\pm 10)_s$ y $(\pm 20)_s$ de carbono/epoxy la delaminación ocurre cuando la discontinuidad (deslizamiento) en la interfase alcanza un valor crítico de 15 micras. Este resultado nos muestra la utilidad que puede tener el código realizado, ya que estas discontinuidades no pueden ser calculadas directamente por el método M4-5N elástico.

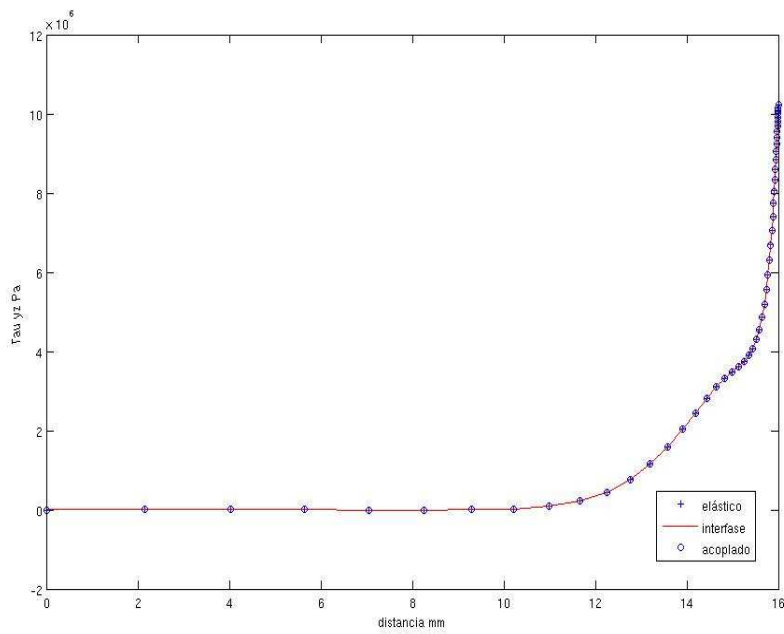


Figura 3.11: Gráfica de τ_{yz} - distancia para dos diferentes simulaciones plásticas

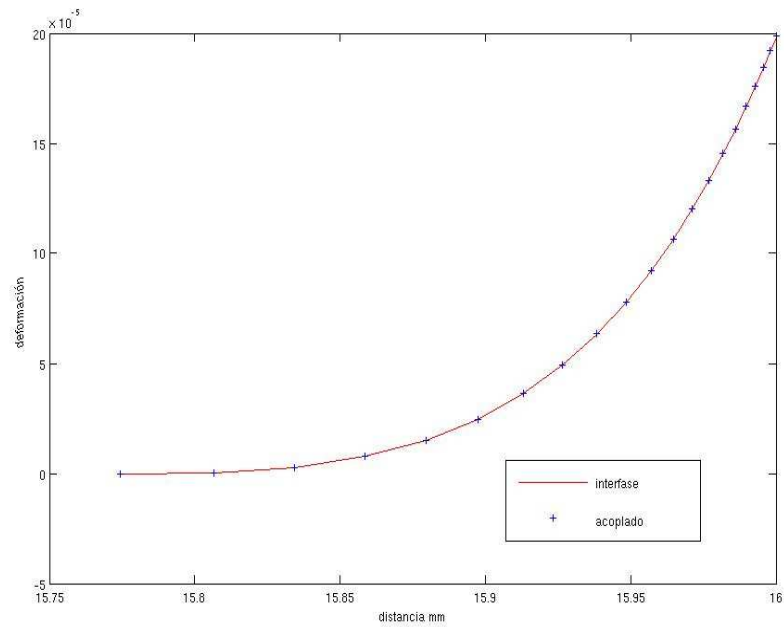


Figura 3.12: Gráfica de γ_y - distancia para dos simulaciones plásticas diferentes

3.7. Conclusiones

En este capítulo se hizo una breve revisión bibliográfica que muestra la dificultad que existe para modelar en los materiales laminados los efectos de borde y los deslizamientos entre las capas. Esta dificultad radica en que las ecuaciones tridimensionales utilizadas, presentan esfuerzos infinitos en los bordes. De estas singularidades no se ha obtenido hasta el momento una información pertinente para predecir el inicio de la delaminación. El modelo M4-5N plástico que nosotros propusimos tiene la ventaja de presentar resultados finitos en los bordes e interfaces y además tiene la ventaja de tomar en cuenta los fenómenos inelásticos en las capas e interfaces entre capas. Este modelo se aplicó a la resolución de un problema de tensión de un multicapa plástico y se plantearon las ecuaciones del problema. Se continuó con una explicación a grosso modo del algoritmo empleado, de su comportamiento nodal y de capa, lo que provocó una gran cantidad de operaciones. Se explicó después el concepto de frente plástico y cómo se propaga éste por el ancho de la capa y que en el centro del multicapa hay coherencia entre los valores calculados y los de la TCPL.

Por otro lado se mencionaron las limitaciones que presenta aún el algoritmo, ya que no está optimizado para reaccionar correctamente a los bruscos cambios que son producidos cuando se tiene un endurecimiento bajo y que tiende a comportarse como si fuera un comportamiento plástico perfecto. Cuando se tienen varios ángulos diferentes de las capas se tiende por lo general a una lenta convergencia. La implementación numérica ya presentó resultados de deslizamientos en la interfase, lo cual puede ser utilizado para predecir el inicio de delaminación del material compuesto laminado.

Finalmente subrayamos que nuestros resultados son los primeros de plasticidad (de capa e interfase) en laminados multicapa con efecto de borde. Además, se dejó planteado, desarrollado y validado (para los problemas clásicos) un modelo que se puede seguir modificando para añadirle comportamientos no lineales como el daño.

Conclusión general

El problema de predecir el comportamiento de un multicapa elástico sin tomar en cuenta los efectos de borde está resuelto [1]. Para los laminados elásticos con efecto de borde se han hecho grandes avances y se puede contar con modelos que pueden simular este efecto ([33], [46]), hasta el punto de poder ser utilizados para criterios de delaminación [48]. Pero el problema empieza cuando se tienen que calcular los fenómenos inelásticos en ambos casos: sin efecto de borde y con efecto de borde. En esta tesis primeramente se implementó el modelo de Allix et. al. [18], para compósitos unidireccionales en el modelo clásico de placas laminadas. Estos cálculos permitieron desarrollar un programa de cómputo que permite simular el comportamiento de un laminado inelástico en tensión sin efecto de borde. Esta primera parte fue una aportación tecnológica de software, ya que como se menciona en el capítulo uno no se encontró reportado ni algoritmo, ni código para laminados multicapa. También es importante acotar que a este software le falta su ampliación a los otros dos tipos de plasticidad (perfecta y con ablandamiento), así como hacerlo más general para diferentes tipos de carga (flexión, ...). Este programa se acoplará a un programa desarrollado en el CIMAV denominado MAC LAM [24], el cual está realizado de una manera amigable y nos permite desde sacar las propiedades efectivas de una capa hasta el comportamiento elástico de un multicapa. La segunda parte de esta tesis parte de un modelo de placas más sofisticado denominado M4-5N el cual fue elaborado en la Escuela Nacional de Puentes y Caminos (ENPC) de Francia [46] y validado ampliamente ([47], [48]) para problemas elásticos. Este modelo es manipulado para proponer ecuaciones de evolución plástica y criterio a los diferentes campos de deformación y deslizamiento. El objetivo principal de esta parte era el obtener las ecuaciones inelásticas y poderlas validar para casos simples. La tercera parte es el planteamiento del algoritmo y su lógica para su programación y verificar las ecuaciones obtenidas. Se pudo verificar que en cada uno de los casos el modelo y el algoritmo dieron resultados satisfactorios. El programa para los casos considerados presenta una buena convergencia y estabilidad. Sin embargo el software tiene que ser optimizado, utilizando un método numérico más potente como el de Newton-Rapshon y hacerlo más general para que incluya los diferentes tipos de plasticidad. Además, será necesario introducir más fenómenos inelásticos como el daño. En cuanto a los resultados, se obtuvieron deformaciones plásticas en la capa con efecto de borde y deslizamientos en la interfase entre las capas, que a través de una extensa revisión bibliográfica se puede asegurar que son los primeros obtenidos y que serán reportados en revistas internacionales. Cabe la aclaración que esta última parte tendrá que ser verificada experimentalmente para su total validación, pero al ver que su comportamiento (en la capa) es asintóticamente equivalente al de TCPL en el centro del laminado, nos da una buena perspectiva. Otro resultado importante que se obtuvo es el cálculo del campo

de desplazamiento de las interfases. Este último resultado tiene una utilidad inmediata e importante: predecir el inicio de la delaminación mediante un criterio de fractura sobre el valor máximo de deslizamiento. Concluyo que el mayor beneficio que traen estos cálculos, es el poder simular comportamiento plástico en los bordes y las interfases, pues esto permitiría optimizar la cantidad de material a utilizar, ya que los factores de seguridad para construir una estructura podrían ser más bajos.

Bibliografía

- [1] Vasiliev V. V. & Morozov E. V. *Mechanics and Analysis of Composite Materials* Elsevier 2001.
- [2] Talreja R. *Damage Mechanics of Composite Materials* Elsevier 1994.
- [3] Sun C. T. & Chen J. L. A simple flow rule for characterizing non-linear behavior of fiber composites. *J. Comp. Mater.*, 23 (1989) 1009-1020.
- [4] Surrel, Y. Vautrin, A., Plastic behavior of fibrous laminate. *Comp. Sci. Technol.*, 49 (1993) 45-50
- [5] Galvanetto U., Pellegrino C., Schreflur B.A. Plane stress plasticity in periodics composites *Computatioanl Materials Science* 13 (1998) 31-41.
- [6] Lemaitre J., How to use damage mechanics, *Nucl. Eng. Design* 20 (1984) 233-245.
- [7] Krajcinovic D., Constitutive equations for damaging materials, *J. Appl. Mech.* 50 (1983) 355-360
- [8] Krajcinovic D., Foneska G.U., The continuous damage theory for brittle materials, *J. Appl. Mech.* 48 (1981) 809-815
- [9] Betten J., Damage tensor in continuum mechanics, *J. de Mécanique théorique et appliquée* 2 (1) (1983) 13-32
- [10] S. Murakami, Mechanical modeling of material damage, *J. Appl. Mech.* 55 (1988) 281-286
- [11] Voyiadjis G.Z., Park T., Kinematics descriptions of damage for finite strain plasticity , *J. Eng. Sci.* 37 (1999) 803-830
- [12] Ladeveze, P. Toward a fracture theory. *Proc. 3rd Int. Conf. on Computational Plasticity, Part II*, ed D. R. J. Owen, E. Onate E. Hinton. Pinerdige Press, Cambridge, UK, 1990, pp. 1369-1400.
- [13] Ladeveze, P. Le Dantec, E., Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Comp. Sci. Technol*, 1992, pp. 257-267

- [14] Allix, O. Ladeveze, Le Dantec, E. Vittecoq. Damage mechanics for composite laminates under complex loading. *Damage and Failure of Anisotropic Solids*, EDFG 5 ed J. P. Boheler. Engineering Publications, London, 1990, pp. 551-569.
- [15] J.W.Ju, Energy based coupled elastoplastic damage theories :constitutive modeling and computational aspect, *Internat. J. Solids Struc.* 25 (1989) 803-833.
- [16] M. Johansson, K. Runesson, Viscoplastic with dynamic yield surface coupled to damage, *Comput. Mech.* 20 (1997) 53-59
- [17] Voyiadjis G.Z., Guelzim Z., A coupled incremental damage and plasticity theory for metal-matrix composites, *J. Mech. Behavior Mater.* 6 (1996) 193-219.
- [18] Allix O., Bahlouli N., Cluzel C., Perret L. Modelling and identification of temperature dependent mechanical behaviour of the elementary ply in carbon/epoxy laminates *Composite Science and Technology* 56(1996) 883-888
- [19] Voyiadjis G. Z., Kattan P.I., A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity part II damage and finite strain plasticity, *Internat. J. Eng. Sci.* 28 (1990) 505-532.
- [20] Voyiadjis G. Z., Deliktas B. A coupled anisotropic damage model for inelastic response of composite materials *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 183 (2000) 159-199
- [21] Boubakar M., Trivaudey F., Perreux D., Vang L. A meso-macro finite element modelling of laminates structures. Part I: time independent behaviour. *Composite Structures* 58(2002) 271-286.
- [22] Khoa Van NGUYEN. Introduction de la plasticite de couche dans les modeles multiparticulaires de materiaux multicouches. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC), Paris 2001.
- [23] Díaz A., Caron J. F., Carreira R. P. Un modèle de stratifiés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 2000.
- [24] Díaz A., Caron J. F., Ehrlacher A. MAC LAM: New software of mechanical analysis of composites and laminates. Congreso: CST 2004, Lisboa, Portugal. Septiembre de 2004.
- [25] Wilkins, D.J., et al., Characterizing Delamination Growth in graphite-Epoxy, *Damage in Composite Materials*, STP 775, K Reifnider, Ed., American Society for Testing and Materials, 1982.
- [26] Foye, R.L. and Baker, D.J., Design of Orthotropic Laminates presented at the 11th Annual AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Denver, Colorado, April 1970.
- [27] Wang, A.S.D., *Fracture Analysis of Interlaminar Cracking, Intermalinar Responses of Composites Materials: Composite Materials Series: Vol 5*, N.J. Pagano (editor), Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 1989, pg. 69.

- [28] Hayashi, T., Analytical Study of Interlaminar Shear Stresses in a Laminate Composite Plate, *Trans, Jpn. Aeron & Space Sci.*, Vol 10, 1967, pg.43
- [29] Puppo, A.H. and Evensen, H.A., Interlaminar Shear in Laminated Composites under Generalized Plane Stress, *Journal of Composite Materials*, Vol 4, 1970, pg. 204.
- [30] Pagano, N.J. and Pipes, R.B., Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension, *Journal of Composite Materials*, Vol 4, 1970, pg. 538.
- [31] Whitney, J.M. and Sun, C.T., A Higher Order Theory for Extensional Motion of Laminated Composites, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 30, 1973, pg.85.
- [32] Tang, S. and Levy, A., A Boundary Layer Theory- Part II: Extension of Laminated Finite Strip, *Journal of Composite Materials*, Vol 9, 1975, pg. 668.
- [33] Pagano, N.J., Stress Fields in Composite Laminates, *International Journal of Solid Structures*, Vol 14, 1978, pg. 385.
- [34] Wang, S.S. and Choi, I., Boundary-Layer Effects in Composite Laminates - 1. Free Edge Singularities, *Journal of Applied Mechanics*, Vol 49, 1982, pg. 594.
- [35] Wang, S.S. and Choi, I., Boundary-Layer Effects in Composite Laminates - 2. Free Edge Stress Solutions and Basic Characteristics, *Journal of Applied Mechanics*, Vol 49, 1982, pg. 541.
- [36] Wang, S.S. and Yuan, F.G., A Hybrid Finite Element Approach to Composite Laminate Elasticity Problems with Singularities, *Journal of Applied Mechanics*, Vol 50, 1983, pg. 835.
- [37] Tong, P. and Pian, T.H.H. On the Convergence of Finite Element Method for Problems with Singularity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol 9, 1973, pg. 313.
- [38] Bar-Yoseph, P. and Ben-David, D., On Mesh Refinement Methods of Mixed-Hybrid Elements for Revealing the Nature of Singularity in the Free Edge of a Composite Laminated Plate, *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol 7, 1991, pg. 315.
- [39] Raju IS, Crews JH. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Comp and Struct* 1981;14:21-28.
- [40] Lecuyer F. Etude des effets de bords dans les structure mince multicouches. Ph.D. Thesis Université Pierre et Marie Curie 1991.
- [41] Lecuyer F, Matheron G. Local effects analysis in composite structure with finite element program COMPOSIC. *Comp Mat Techn*, ASME Houston Texas 1992;45:141-145.
- [42] Puppo A.H., Evensen H.A. Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress. *Journal of composite materials*, Vol. 4, pp 204-220, 1970.
- [43] Garrett K.W., Bailey J.E. Multiple transverse fracture in 90 cross-ply laminates of glass fibre-reinforced polyester. *Journal of materials science*, Vol. 12, 1977.

- [44] Reissner E. On a variational theorem in elasticity. J. Math.Phys., Vol. 29, pp. 90-95, 1950.
- [45] Pagano N.J., Soni S.R. Global-local laminate variational model. International Journal of Solids and Structures, Vol. 19, p. 207-228, 1983
- [46] Chabot A. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites a l'aide des M4. These de doctoral de l'ENPC, 1997.
- [47] Carreira R.P. Validations par éléments finis des Modeles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches M4. These de doctorat de l'ENPC,1998.
- [48] Díaz A. Delaminage des materiaux multicouches: phenomenes, modeles et criteres. These de doctoral de l'ENPC, 2001.
- [49] Salamon N.J. An assessment of the interlaminar stress problem in laminated composites., supplement of J. Comp. Mater. 1980; 14;177-194.
- [50] Yin, W.L., A general analysis method for singularities in composite structures, Proceedings of 1997 , structures, structural dynamics materials conference, pg 2238-2246
- [51] Becker, W., Closed form solution for the free edge effects in cross ply laminates, Composite Structures, Vol 26, 1993, pg. 39.
- [52] Han, Y and Kumosa, M., Adhesively Bonded composite Iosipescu Specimen without Singular Stress Fields, Mechanics of Composite Materials and structures: An international Journal, J.N. Reddy (Editor), Vol. 5, No. 2, 1998, pg.127-151.
- [53] Gander W., Gautschi W., Adaptive Quadrature-Revisited ,Eidgenossische Technische Hochschule Zurich,1998,306